BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

02358

MATHEMATICS

MTE-9 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt five questions in all. Q. No. 1 is compulsory. Do any four questions out of Q. No. 2 to 7.*

1. Are the following statements True or False ? Give reasons for your answers. **10**

(a) The function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2 : \text{for } 1 \leq x < 3 \\ 4 : \text{for } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

is differentiable at $x = 2$.

(b) The function $f(x) = \sin x$ is uniformly continuous on $[0, \pi/2]$.

(c) Every positive term series is convergent.

(d) The singleton set $\{x\}$, for any $x \in \mathbf{R}$, is a neighbourhood of x.

(e) The function f defined by

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \text{ when } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$$

(n = 0, 1, 2 ......)

$f(0) = 0$

is integrable on [0, 1].

2. (a) For any two real numbers x and y, prove that $|x - y| \geq ||x| - |y||$ **3**

(b) Prove that **3**

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}, x > 0.$$

(c) Define a limit point of a subset S of **R**. Check whether 1, 2, 3 are limit points of the set [0, 2]. **4**

3. (a) Use Weierstrass M-test to prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ converges uniformly in $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. **4**

(b) Find the value of a so that **4**

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \sin 2x + \sin 3x}{x^3}$$

is finite. Also find the limit.

(c) Is the set of integers a countable set ? Justify your answer. **2**

4. (a) Test the continuity of the function **4**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} & \text{when } x \neq 0 \\ 1 & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

at $x = 0$

(b) Test for convergence the following series **6**

(i) $\dfrac{1}{4.6} + \dfrac{\sqrt{3}}{6.8} + \dfrac{\sqrt{5}}{8.10} + \ldots\ldots$

(ii) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots\ldots$

5. (a) Is every uniformly continuous function defined on **R** continuous ? Justify your answer. **3**

(b) Let $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ be a function defined by $f(x) = \cos x$. Show that f^{-1} exists and continuous on $[-1, 1]$. **3**

(c) Find Maclaurin Series expansion of the function $\sin 2x$. **4**

6. (a) Prove that the sequence (S_n) defined by **5**

$$S_1 = \frac{3}{2},\ S_{n+1} = 2 - \frac{1}{S_n},\ n \geq 1$$

is bounded, monotonic and converges.

(b) Apply Lagranges Mean Value Theorem to the function $\log(1+x)$ to prove that $0 < [\log(1+x)]^{-1} - x^{-1} < 1, x > 0.$ 5

7. (a) Find $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{2n} \frac{n^2}{(2n+r)^3}$ 4

(b) Identify the interval in which the function f on $\mathbf{R}$ defined by

$f(x) = 15 - x + 2x^2 - x^3$

is decreasing. 3

(c) Let $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ be a function defined by 3

$f(x) = 2x$. Let $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ and

$P_2 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ be two partitions of the interval $[0, 1]$. Show that

$L(P_2, f) \leq u(P_1, f)$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

गणित

एम.टी.ई.-9 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न सं. 1* **अनिवार्य** *है। प्रश्न सं 2 से 7 में से* ***किन्हीं चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कुल* ***पाँच*** *प्रश्न कीजिए।*

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। **10**

(a) $f(x) = \begin{cases} 2 : \text{for } 1 \le x < 3 \\ 4 : \text{for } 3 \le x \le 4 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 2$ पर अवकलनीय है।

(b) फलन $f(x) = \sin x$, $[0, \pi/2]$ पर एकसमानतः संतत है।

(c) प्रत्येक घनात्मक पद श्रेणी अभिसारी होती है।

(d) किसी $x \in \mathbf{R}$, के लिए, समुच्चय $\{x\}$, x का एक प्रतिवेश है।

(e) $f(x) = \frac{1}{2^n}$ जब $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$

$(n = 0, 1, 2 \ldots\ldots)$ $f(0) = 0$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[0, 1]$ पर समाकलनीय है।

2. (a) कोई दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए सिद्ध कीजिए कि $|x - y| \geq ||x| - |y||$. **3**

(b) सिद्ध कीजिए कि : **3**

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}, x > 0.$$

(c) **R** के उपसमुच्चय S का सीमा बिंदु परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि 1, 2, 3 समुच्चय [0, 2] के सीमा बिंदु हैं या नहीं। **4**

3. (a) वाइएर्स्ट्रास M-परीक्षण का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ में एकसमानतः अभिसरण करती है। **4**

(b) a का ऐसा मान ज्ञात कीजिए ताकि : **4**

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \sin 2x + \sin 3x}{x^3}$$

परिमित हो। इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिए।

(c) क्या पूर्णांकों का समुच्चय एक गणनीय समुच्चय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **2**

4. (a) $x = 0$ पर फलन : **4**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

की सांतत्य की जाँच कीजिए।

(b) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : **6**

(i) $\dfrac{1}{4.6} + \dfrac{\sqrt{3}}{6.8} + \dfrac{\sqrt{5}}{8.10} + \ldots\ldots$

(ii) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots\ldots$

5. (a) क्या **R** पर परिभाषित प्रत्येक एकसमानतः संतत फलन संतत होता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **3**

(b) मान लीजिए $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ द्वारा परिभाषित फलन है। दिखाइए कि f^{-1} का अस्तित्व होता है और $[-1, 1]$ पर संतत है। **3**

(c) फलन $\sin 2x$ का मैक्लोरियन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। **4**

6. (a) सिद्ध कीजिए कि $S_1 = \frac{3}{2}$, $S_{n+1} = 2 - \frac{1}{S_n}$, $n \geq 1$ **5**
द्वारा परिभाषित अनुक्रम (S_n) एकदिष्ट, परिबद्ध है और अभिसरण करता है।

(b) फलन $\log(1+x)$ के लिए लग्रांज माध्य मान प्रमेय **5**
लागू करके सिद्ध कीजिए कि :

$$0 < [\log(1+x)]^{-1} - x^{-1} < 1,\ x > 0.$$

7. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{2n} \frac{n^2}{(2n+r)^3}$ ज्ञात कीजिए। **4**

(b) वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें **R** पर **3**
$f(x) = 15 - x + 2x^2 - x^3$ द्वारा परिभाषित फलन f ह्रासमान है।

(c) मान लीजिए $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$ द्वारा **3**
परिभाषित फलन है। मान लीजिए $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

और $P_2 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ अन्तराल $[0, 1]$ के दो विभाजन है। दिखाइए कि $L(P_2, f) \leq u(P_1, f)$.