No. of Printed Pages : 8 **MTE-8**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

01818

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-8 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Q. No. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions out of the remaining questions Nos. 2 - 7. Calculators are **not** allowed.*

---

1. State whether the following statements are **true** or **false**. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example. **2x5=10**

(a) The differential equation representing all tangents $ty = x + t^2$ at the point $(t^2, 2t)$ to the parabola $y^2 = 4x$ is $x\,(y')^2 + yy' + 1 = 0$.

(b) An integrating factor of the differential equation $x^2\,(x\,dx + y\,dy) + y\,(x\,dy - y\,dx) = 0$ is $x^2\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$.

(c) All the solutions of the differential equation

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)\,y = 0, \left(D \equiv \frac{d}{dx}\right)$$

are expressible as $(C_1 + C_2\,x)\,e^x + (C_3 x + C_4 x^2)e^{2x}$, where C_1, C_2, C_3, C_4 are parameters.

(d) The primitive of the equation

$(\cos x + e^x y)\, dx + (e^x + e^y z)\, dy + e^y dz = 0$ is $\sin x + ye^x + ze^y = C$ (C : parameter).

(e) The p.d.e.

$$a\, u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = 0,$$

Where a, b, c are the constants is irreducible when $b^2 - ac = 0$.

2. (a) Solve the equation $(7y - 3x + 3)\, dy + (3y - 7x + 7)\, dx = 0$. **3**

(b) Using the method of undetermined coefficients, solve **3**

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

(c) Using Charpit's method, solve the equation $zp^2 - y^2p + y^2q = 0$. **4**

3. (a) Using the method of variation of parameters, solve the equation **4**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{cosec } x,\ 0 \le x < \pi/2$$

(b) A mass m, free to move along a line, is attracted towards a given point on the line with a force proportional to its distance from the given point. If the mass starts from rest at a distance x_0 from the given point, show that the mass moves in a simple harmonic motion. **4**

(c) Show that, for the differential equation 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y=0,$$

$x \in I$ (interval), e^{mx} is a particular integral if $m^2+a(x)\,m+b(x)=0$. Hence find the value of m so that e^{mx} is a particular integral of the equation.

$$(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} - (4x-7)\frac{dy}{dx} + (4x-6)\,y=0$$

4. (a) Reduce the differential equation 5

$$\frac{dy}{dx}\left\{\frac{d}{dy}\phi(y)\right\} + \phi(y)\,f(x) = g(x),$$

(where $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is an arbitrary differentiable function, $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are arbitrary functions) to a linear differential equation. Also solve the equation

$$(\sin y)\frac{dy}{dx} = (\cos y)(1-x\cos y).$$

(b) Solve the equation 5

$$\left(D_x^2+2D_x D_y-8D_y^2\right) z = \sqrt{2x+3y},\ x>0,\ y>0,$$

where, $D_x z \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $D_y z = \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. (a) Find the one-parameter family of solutions of the equation $y=2px+p^4x^2$, $(x>0)$ 5

$\left(p \equiv \frac{dy}{dx}\right)$, and find its singular solution.

(b) Using the method of separation of variables, find the solution of the heat equation 5

$$u_t = k^2 u_{xx}, \quad k > 0,$$

that satisfies the following conditions :

$$u(0, t) = 2, \quad u(2, t) = 4, \quad u(x, 0) = f(x).$$

6. (a) Solve the equation 2

$$(D - 2D'^2 - 1)(D - 2D' - 1)\, z = 0.$$

(b) Find the integral surface of the p.d.e. 5

$(x - y)\, p + (y - x - z)\, q = z$ through the circle $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

(c) Solve the equation. 3

$$x \frac{dy}{dx} = y + x e^{y/x} \text{ subject to } y(1) = 1.$$

7. (a) Verify that the equation 4

$$(2xz - yz)\, dx + (2yz - xz)\, dy - (x^2 - xy + y^2)\, dz = 0$$

is integrable and find its integral using the method of solving pfaffian equations.

(b) Solve the equation 3

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x + y).$$

(c) Solve the equation $(D^4 + 2D^3 - 3D^2)\, y = x^2$. 3

एम.टी.ई.-8

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-8 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 2 - 7 तक में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **2x5=10**

(a) परवलय $y^2 = 4x$ के बिन्दु $(t^2, 2t)$ पर सभी स्पर्श रेखाओं $ty = x + t^2$ को निरुपित करने वाला अवकल समीकरण $x\,(y')^2 + yy' + 1 = 0$ है।

(b) अवकल समीकरण :

$x^2\ \ (x\,dx + y\,dy) + y\ \ (x\,dy - y\,dx) = 0$ का

समाकलन गुणक $x^2\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$ है।

(c) अवकल समीकरण $(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)$ $y = 0$, $\left(D \equiv \frac{d}{dx}\right)$ के सभी हल $(C_1 + C_2\,x)\,e^x +$ $(C_3x + C_4x^2)e^{2x}$, के रूप में व्यक्त किए जा सकते हैं। जहाँ C_1, C_2, C_3, C_4 प्राचल हैं।

(d) समीकरण

$(\cos x + e^x y)\, dx + (e^x + e^y z)\, dy + e^y dz = 0$ का पूर्वग $\sin x + ye^x + ze^y = C$ (C : प्राचल है)

(e) आंशिक अवकल समीकरण :

$$a\, u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = 0,$$

जहाँ a, b, c अचर हैं, असमनिय होता है जब $b^2 - ac = 0$ हो।

2. (a) समीकरण : 3

$(7y - 3x + 3)\, dy + (3y - 7x + 7)\, dx = 0$ को हल कीजिए।

(b) अनिर्धारित गुणांक विधि से निम्नलिखित को हल कीजिए। 3

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

(c) चार्पिट विधि से समीकरण $zp^2 - y^2p + y^2q = 0$ को हल कीजिए। 4

3. (a) प्राचल विचरण विधि से समीकरण : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{cosec } x,\ 0 \le x < \pi/2$$

को हल कीजिए।

(b) एक द्रव्यमान m जो मुक्त रूप से एक रेखा पर गतिशील है वह रेख पर दिए गए एक बिन्दु की ओर उस बिन्दु से अपनी दूरी के समानुपाती बल से आकृष्ट होता है। यदि द्रव्यमान दिए गए बिन्दु से दूरी x_0 पर विश्रामावस्था से प्रारंभ होता है तो दिखाए कि द्रव्यमान सरल आवर्त गति में गतिमान होता है। 4

(c) दिखाइए कि अवकल समीकरण: 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y=0,$$

$x \in I$ (अन्तराल) के लिए e^{mx} विशेष समाकल है यदि $m^2 + a(x)\,m + b(x) = 0$ अत: m का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए e^{mx} समीकरण

$$(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} - (4x-7)\frac{dy}{dx} + (4x-6)\,y=0$$

का एक विशेष समाकल हो।

4. (a) अवकल समीकरण : 5

$$\frac{dy}{dx}\left\{\frac{d}{dy}\phi(y)\right\} + \phi(y)\,f(x) = g(x),$$

(जहाँ $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एक स्वेच्छ अवकलनीय फलन है $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ स्वेच्छ फलन है।) को रैखिक अवकल समीकरण में समानित कीजिए। तथा समीकरण :

$(\sin y)\frac{dy}{dx} = (\cos y)(1 - x\cos y)$. को हल कीजिए।

(b) समीकरण : 5

$\left(D_x^2 + 2D_x D_y - 8D_y^2\right) z = \sqrt{2x+3y}$, $x>0$, $y>0$, को हल कीजिए जहाँ : $D_x z \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $D_y z = \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. (a) समीकरण $y = 2px + p^4x^2$, $(x > 0)$ $\left(p \equiv \frac{dy}{dx}\right)$, 5
का एक प्राचल हल-कुल ज्ञात कीजिए और इसका विचित्र हल ज्ञात कीजिए।

(b) चर-पृथक्करण विधि द्वारा ऊष्मा समीकरण : 5

$u_t = k^2 u_{xx}$, $k > 0$, का वह हल ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है :

$u(0, t) = 2$, $u(2, t) = 4$, $u(x, 0) = f(x)$.

6. (a) समीकरण : 2

$(D - 2D'^2 - 1)(D - 2D' - 1) z = 0$

को हल कीजिए।

(b) आंशिक अवकल समीकरण : 5

$(x - y) p + (y - x - z) q = z$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो वृत्त $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ से गुजरता हो।

(c) समीकरण : 3

$x \frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}$ जबकी $y(1) = 1$, का हल प्राप्त कीजिए।

7. (a) जाँच कीजिए कि समीकरण : 4

$(2xz - yz)\,dx + (2yz - xz)\,dy - (x^2 - xy + y^2)\,dz = 0$ समाकलनीय है और फैफियन समीकरण हल करने की विधि से इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

(b) समीकरण : 3

$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1) z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$

को हल कीजिए।

(c) समीकरण $(D^4 + 2D^3 - 3D^2) y = x^2$ को हल कीजिए। 3