No. of Printed Pages : **11**

MTE-7

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-7 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : ***Question No. 1*** *is* ***compulsory****. Attempt* ***any four*** *questions from the remaining.* ***No*** *Calculators are allowed.*

---

1. State whether the following statements are ***true*** or ***false***. Give reasons for your answers. **2x5=10**

   (a) The projection π_2 defined on $\mathbf{R}^3$ is a vector valued function.

   (b) Every real valued continuous function of two variables is differentiable.

   (c) Existence of partial derivatives at a given point is a necessary condition for a function to have an extremum at that point.

   (d) The function f, defined by
   $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
   is integrable over $[2, 1] \times [1, 2]$.

   (e) For the real valued function
   $F(x, y) = x^2 - 2y^2$,
   the hypothesis of Implicit Function Theorem is satisfied at the point $(0, 0)$.

2. (a) When do we say a real valued function of two variables is continuously differentiable at a point ? Check whether the real valued function f of two variables given by 5

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin x + 9x^2 + 2xy$$

is continuously differentiable at the point (1, 2) or not.

(b) Show that 2

$$\lim_{x \to -\infty} e^{5x} \sin\left(\frac{1}{5x} + x\right) = 0.$$

(c) Show that the map 3

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Given by $F(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$

is locally invertible at all points in $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Let $f(x, y) = (e^{x^2+y^2}, x + 2y, 3xy)$ 2

be a function from $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

and $g(x, y, z) = xyz$ be a function from $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Find the composite functions gof and fog if they exist.

(b) Show that 3

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \left(2x \sin\frac{1}{y} + 3y \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

(c) Find the area of the region D lying in the first quadrant bounded by the curves $xy = 4$; $xy = 9$, $4y = x$ and $y = 4x$. **5**

Using the transformation, $u = \sqrt{xy}$ and

$v = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

4. (a) Show that the following integral is independent of path **2**

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(2y^2 + 3x^2 y\right) dx + \left(4xy + x^3\right) dy$$

(b) Find the domain and range of the function f, defined by **3**

$$f(x,y) = \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}$$

Also find two level curves of this function.

(c) Verify the chain rule for the Jacobians for the following functions : **5**

$x = 3e^{2u}$, $y = 5v + w$, $z = u + w$;

$u = 2p$, $v = e^q$, $w = r$.

5. (a) Evaluate : **2**

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{5}{3 + x^2} + \cos\left(\frac{7}{x}\right) \right]$$

(b) Evaluate f_{xy} at (x, y) for the function f defined by $f(x, y) = 2x^2 + 7xy + 11y^2$. 5

Stating Schwarz's theorem check whether the above function f satisfies the conditions of this theorem or not. If so, find

$f_{yx}(-1, 1)$, using the above theorem.

(c) Show that the function 3

$f(x,y) = x^2y^2 - 4xy + 7$ has a local minimum at (1, 1).

6. (a) Can we evaluate 2

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2x+\pi}{1-\sin x}$$ using L' Hopital's rule.

Give reasons.

(b) Find the directions in which the function f defined by 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{5x^2+5y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

has directional derivatives at (0, 0).

(c) Find the centre of gravity of a thin plate of uniform thickness and density s, bounded by the curves, $y = x^2$ and $y = x$ in the first quadrant. 5

7. (a) Find the values of a and b for which **3**

$$\lim_{x \to 0} \frac{ae^{x} + be^{-x} - 2x}{1 - \cos x} \text{ exists.}$$

(b) Find the volume of the region lying in the first octant which is common to the two cylinders $x^2 + y^2 = 9$ and $y^2 + z^2 = 9$. **3**

(c) Define the n^{th} Taylor polynomial of a real valued function of 2 variables at (a, b). Find the second Taylor polynomial of the function, f given by $f(x, y) = e^{x+2y}$ at $(-1, 1)$. **4**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-7 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न 1 करना* ***जरूरी*** *है। शेष प्रश्नों में से* ***किन्हीं चार*** *के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए : **2x5=10**

(a) $\mathbf{R}^3$ पर परिभाषित प्रक्षेपण π_2 एक सदिश-मान फलन है।

(b) दो चरों वाला प्रत्येक वास्तविक मान संतत फलन अवकलनीय होता है।

(c) किसी बिन्दु पर किसी फलन के चरम मान होने के लिए एसा बिन्दु पर अंशिक अवकलनों के अस्तित्व का होना एक अनिवार्य प्रतिबंध है।

(d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[2, 1] \times [1, 2]$ पर समाकलनीय है।

(e) वास्तविक-मान फलन $F(x, y) = x^2 - 2y^2$ के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय की परिकल्पना बिन्दु $(0, 0)$ पर संतुष्ट होती है।

2. (a) दो चरों वाला वास्तविक-मान फलन एक बिंदु पर संतत: अवकलनीय होता है, ऐसा कब कहा जाता है? जाँच कीजिए कि $f(x, y) = e^{x+y} \sin x + 9x^2 + 2xy$ द्वारा दिए गए दो चरों का वास्तविक मान फलन f, बिन्दु (1, 2) पर संतत: अवकलनीय है या नहीं। 5

(b) दिखाइए कि : 2

$$\lim_{x \to -\infty} e^{5x} \sin\left(\frac{1}{5x} + x\right) = 0.$$

(c) दिखाइए कि $F(x, y) = (x+2y, 2x+y)$ द्वारा परिभाषित फलन $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ में सभी बिन्दुओं पर स्थानिकत: व्युत्क्रमणीय है। 3

3. (a) मान लीजिए $f(x, y) = (e^{x^2+y^2}, x+2y, 3xy)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ तक एक फलन है और $g(x, y, z) = xyz$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ तक फलन है। संयुक्त फलन gof और fog ज्ञात कीजिए, यदि उनका अस्तित्व है तो। 2

(b) दिखाइए कि : 3

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \left(2x \sin\frac{1}{y} + 3y \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

(c) रूपांतरण $u = \sqrt{xy}$ और $v = \sqrt{\frac{x}{y}}$ का प्रयोग करते हुए उस प्रदेश D का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वक्रों $xy = 4$; $xy = 9$, $4y = x$ और $y = 4x$ द्वारा परिबद्ध है और प्रथम चतुर्थांश में स्थित है। 5

4. (a) दिखाइए कि निम्नलिखित समाकल पथ-स्वातंत्र्य 2

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(2y^2+3x^2y\right)dx+\left(4xy+x^3\right)dy$$

(b) $f(x,y)=\frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। इस फलन के दो स्तर-वक्र भी ज्ञात कीजिए। 3

(c) निम्नलिखित फलनों के जैकोबियनों के लिए श्रृँखला नियम सत्यापित कीजिए : 5

$x=3e^{2u}$, $y=5v+w$, $z=u+w$;

$u=2p$, $v=e^q$, $w=r$.

5. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5}{3+x^2}+\cos\left(\frac{7}{x}\right)\right]$ का मूल्यांकन कीजिए। 2

(b) $f(x, y)=2x^2+7xy+11y^2$ द्वारा परिभाषित फलन के लिए (x, y) पर f_{xy} का मूल्यांकन कीजिए। श्वार्ज प्रमेय का कथन देते हुए जाँच कीजिए कि उपर्युक्त फलन f इस प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है या नहीं। यदि करता है तो उपर्युक्त प्रमेय से $f_{yx}(-1, 1)$ ज्ञात कीजिए। 5

(c) दिखाइए कि फलन $f(x, y)=x^2y^2-4xy+7$ का $(1, 1)$ पर स्थानिक निम्निष्ट होता है। 3

6. (a) लापिताल नियम द्वारा क्या हम **2**

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2x+\pi}{1-\sin x}$ का मूल्यांकन कर सकते हैं? कारण बताइए।

(b) वे दिशाएँ ज्ञात कीजिए जिनमें **3**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{5x^2+5y^2}, & (x,\ y) \neq (0,\ 0) \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f के (0, 0) पर दिक्क अवकलन होते हैं।

(c) प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y = x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध एकसमान मोटाई और घनत्व s वाली पतली प्लेट का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए। **5**

7. (a) a और b के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए **3**

$\lim_{x \to 0} \frac{ae^x + be^{-x} - 2x}{1-\cos x}$ का अस्तित्व होता है।

(b) प्रथम अष्टांशक में स्थित दो बेलनों $x^2 + y^2 = 9$ और $y^2 + z^2 = 9$ के सर्वनिष्ठ भाग का आयतन मालूम कीजिए। **3**

(c) (a, b) पर दो चरों वाले वास्तविक--मान फलन के लिए n - वें टेलर बहुपद की परिभाषा दीजिए। $(-1, 1)$ पर $f(x, y) = e^{x+2y}$ द्वारा परिभाषित फलन f का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4