No. of Printed Pages : 8

MTE-6

03463

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE - 6 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt 5 questions in all. Question No. 7 is* **compulsory.** *Answer* **any four** *questions from the rest. Use of calculator not permitted.*

---

1. (a) Write two distinct equivalence relations on the set $S = \{a, b, c\}$,. Justifying your answer. **5**

   (b) Let G be a group and H, K be normal subgroups of G. Let $H \cap K = \{e\}$. Then show that $hk = kh$ for each $h \in H$, $k \in K$. **2**

   (c) Give an example, with justification, of a ring R and its ideals I and J such that $IJ \neq I \cap J$. **3**

2. (a) Determine whether the following groups are cyclic w.r.t. componentwise addition : $Z_3 \times Z_3$, $Z_3 \times Z_5$. **4**

   (b) Show that the quotient ring $\frac{R[X]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$ is isomorphic to the field C of complex numbers. **6**

3. (a) Give an example, with justification, of two primes p and q in Z such that p is a prime in $Z[i]$ also but q is not a prime in $Z[i]$. 4

(b) Let G be a group and a, b $\in$ G If $a^5 = e$, $aba^{-1} = b^2$, then find the order of b. 4

(c) Give two distinct elements of $\dfrac{Q[X]}{\langle 2x^2+7 \rangle}$. 2

4. (a) Show that there is no permutation σ in S_5 satisfying $\sigma_0 (1\ 2\ 3)\ 0\ (4\ 5) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ 0\ \sigma$ 2

(b) Let $I = \langle x^2 + 2x + 3 \rangle$ and $J = \langle x^3 + x + 1 \rangle$ be ideals in $Q[x]$. Find a $g \in Q[x]$ such that $I + J = \langle g \rangle$. 3

(c) Show that every group of order 20 has a proper normal non-trivial subgroup. 3

(d) If H is a subgroup of a finite group G, define the 'index of H in G'. 2

Also find the index of $\langle (2\ 3\ 4) \rangle$ in S_4.

5. (a) Check whether $R = {Q[x]} \big/ {\langle x^3 + 18x^2 + 3x + 6 \rangle}$ 4

is a field or not. If R is a field, find its characteristic. If R is not a field, obtain its quotient field.

(b) Prove the following statement using the principle of mathematical induction : 4

If $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ and $a \in R$, then $p(x)$ can be written as $b_0 + b_1 (x-a) + \ldots + b_n (x-a)^n, b_i \in R\ \forall\ i = 0, 1, \ldots, n$.

(c) If $x = \overline{2}$, $y = \overline{3}$, $z = \overline{4}$ in Z_5, find $x^2 y^{-2} z$. 2

6. (a) Let R and R′ be commutative rings and $f : R \to R'$ be a ring homomorphism. Prove or disprove that if I is an ideal of R, then $f(I)$ is an ideal of R′. **2**

(b) Let G be a group and **3**

$Z(G) = \{a \in G \mid xa = ax \ \forall \ x \in G\}$. If $G/Z(G)$ is cyclic, then show that G is an abelian group.

(c) Let (D, δ) be a Euclidean domain. Prove that for every integer n such that $\delta(1) + n \geq 0$, the function $f_n : D \setminus \{0\} \to Z : f_n(a) = \delta(a) + n$ is a Euclidean valuation on D. **3**

(d) Let G be a cyclic group of order 6. Can G be isomorphic to a subgroup of S_7 ? Justify your answer. **2**

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers. **10**

(a) If every proper subgroup of G is cyclic, then G is also cyclic.

(b) $x^2 + 1$ is irreducible in $Z_5[x]$.

(c) The symmetric group S_{11} has an element of order 30.

(d) If G_1, G_2, G_3 are three groups of order six, then there is a pair among them which are isomorphic to each other.

(e) If k is a field, so is $k \times k$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
सत्रांत परीक्षा
जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.- 6 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न 7 **(सात) करना ज़रूरी** है। शेष प्रश्नों में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) समुच्चय $S = \{a, b, c\}$ पर दो अलग-अलग तुल्यता संबंधों को लिखिए तथा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

   (b) मान लीजिए कि G एक समूह है तथा H, K समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं। मान लीजिए कि $H \cap K = \{e\}$ है। तब, दर्शाइए कि प्रत्येक $h \in H$, $k \in K$ के लिए $hk = kh$ है। 2

   (c) पुष्टि के साथ, एक वलय R तथा उसकी गुणजावलियों I और J का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जिसके लिए $IJ \neq I \cap J$ हो। 3

2. (a) निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित समूह संगत घटकों के योग के सापेक्ष चक्रीय हैं : 4

   $Z_3 \times Z_3$, $Z_3 \times Z_5$.

(b) दर्शाइए कि विभाग वलय $\frac{R[X]}{\langle x^2+1 \rangle}$ सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र C के तुल्याकारी है। 6

3. (a) पुष्टि के साथ, Z में दो अभाज्य संख्याओं p और q का एक ऐसा उदाहरण दीजिए कि p, $Z[i]$ में भी अभाज्य हो परंतु q, $Z[i]$ में अभाज्य न हो। 4

(b) मान लीजिए कि G एक समूह है तथा $a, b \in G$. यदि $a^5 = e$, $aba^{-1} = b^2$ है, तो b की कोटि ज्ञात कीजिए। 4

(c) $\frac{Q[X]}{\langle 2x^2+7 \rangle}$ के दो अलग-अलग अवयव दीजिए। 2

4. (a) दर्शाइए कि S_5 में, σ_0 (1 2 3) 0 (4 5) = (1 2 3 4 5) 0 σ को संतुष्ट करने वाला कोई क्रमचय σ नहीं है। 2

(b) मान लीजिए कि $I = <x^2 + 2x + 3>$ और $J = <x^3 + x + 1>$, $Q[x]$ में गुणजावलियाँ हैं। एक ऐसा $g \in Q[x]$ ज्ञात कीजिए जिससे कि $I + J = < g >$ हो। 3

(c) दर्शाइए कि कोटि 20 वाले प्रत्येक समूह का एक उचित प्रसामान्य अतुच्छ उपसमूह होता है। 3

(d) यदि H एक परिमित समूह G का एक उपसमूह है, तो "G में H के सूचकांक" को परिभाषित कीजिए। साथ ही, S_4 में $\langle (2\ 3\ 4) \rangle$ के सूचकांक को ज्ञात कीजिए। 2

5. (a) जाँच कीजिए कि $R = Q[x] / \langle x^3+18x^2+3x+6 \rangle$ एक क्षेत्र है या नहीं। यदि R एक क्षेत्र है, तो उसका अभिलक्षणिक ज्ञात कीजिए। यदि R एक क्षेत्र नहीं है, तो उसका विभागक्षेत्र प्राप्त कीजिए। 4

(b) निम्नलिखित कथन को, गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए : 4

यदि $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ और $a \in R$, तो $p(x)$ को निम्न रुप में लिखा जा सकता है : $b_0 + b_1 \ (x-a) + \ldots + \ b_n \ (x-a)^n$, जहाँ $bi \in R \forall i = 0, 1, \ldots, n$.

(c) यदि Z_5 में $x = \bar{2}$, $y = \bar{3}$, $z = \bar{4}$ हो, तो $x^2 y^{-2} z$ ज्ञात कीजिए। 2

6. (a) मान लीजिए कि R और R' क्रमविनिमेय वलय हैं तथा $f : R \to R'$ एक वलय समाकारिता है, तो सिद्ध अथवा असिद्ध कीजिए कि यदि I , R की एक गुणजावली है, तो $f(I)$, R' की एक गुणजावली होगी। 2

(b) मान लीजिए कि G एक समूह है तथा $Z(G) = \{a \in G \mid xa = ax \ \forall \ x \in G\}$ है। यदि $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो दर्शाइए कि G एक आबेली समूह होगा। 3

(c) मान लीजिए कि (D, δ) एक यूक्लिडीय प्राँत है। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक ऐसे पूर्णांक n के लिए कि $\delta(1) + n \geq 0$ हो, फलन $f_n : D \setminus \{0\} \to Z$: $f_n(a) = \delta(a) + n$, D पर एक यूक्लिडीय मानांकन है। 3

(d) मान लीजिए कि G कोटि 6 वाला एक चक्रीय समूह है। क्या G, S_7 के किसी उपसमूह के तुल्याकारी हो सकता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **2**

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन ***सत्य*** हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए। **10**

(a) यदि G का प्रत्येक उचित उपसमूह चक्रीय है, तो G भी चक्रीय होगा।

(b) x^2+1, $Z_5[x]$ में अखंडनीय है।

(c) समयित समूह S_{11} में कोटि 30 वाला एक अवयव है।

(d) यदि G_1, G_2, G_3 कोटि 6 के तीन समूह हैं, तो इनमें दो ऐसे हैं जो एक दूसरे के तुल्याकारी हैं।

(e) यदि k एक क्षेत्र है, तो $k \times k$ भी एक क्षेत्र होगा।