No. of Printed Pages : **11** **MTE-2**

02148

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-2 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage 70%)

Note : *Q. No.* ***1*** *is* ***compulsory****. Attempt* ***any four*** *questions from Q. No.* ***2*** *to* ***7****.* ***No*** *calculators are allowed.*

---

1. Which of the following statements are true, and which are false ? Give reasons for your answers. **10**

(a) There exists an invertible 3×4 matrix.

(b) No skew-symmetric matrix is diagonalisable.

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,(i - 2j)$, $\frac{2i + j + 5k}{\sqrt{30}}$, and $(2i + j - k)$ form an orthogonal basis of R^3.

(d) If the characteristic polymial of a matrix is $(x-1)^2\,(x-2)^2$, then its minimal polynomial can be $(x-1)^2$.

(e) $\{$IGNOU, -1, $0.05\}$ is a set.

2. (a) Let $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$. Show that R^+ is a real vector space with respect to $\oplus$ and $\odot$, defined by $a \oplus b = ab$ and $\alpha \odot a = a^\alpha \ \forall$ a, b $\in R^+$ and $\alpha \in R$. 5

(b) Let S and T be linear operators on R^3, defined by S (x, y, z) = (z, x, y) and T (x, y, z) = $(0, y, z)$. Show that $\{T.S\}_B = [T]_B.[S]_B$, where B is the standard ordered basis of R^3. 3

(c) Let (V, <, >) be an inner product space. If W is a subspace of V, define. 2

$$W^\perp = \{v \in V \mid <v, w> = 0 \text{ for all } w \in W\}.$$

Show that $W^\perp$ is a subspace of V.

3. (a) Let $T = R^4 \to R^3$ be defined by $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_3 + x_4)$. 5

(i) Find a basis of the range space of T and also of its null space.

(ii) State the rank-nullity theorem and verify it for T.

(b) Reduce $x^2 - 4xy + y^2 + 6\sqrt{2}\ (x - y) + 21 = 0$ to standard form. Hence identify the conic represented by this equation. 5

4. (a) Consider T : $R^3 \to R^3$, given by **6**

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

where B is the standard basis of R^3. Is T invertible ? If so, find $T^{-1}(x, y, z)$ for $(x, y, z) \in R^3$. If T^{-1} does not exist, find the minimal polynomial of T.

(b) Find A, where the adjoint of A is **2**

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2-5i \\ 2+5i & 1+i \end{bmatrix}.$$

(c) Check whether the binary operation $*$ defined on Z by $a*b = ab^2$, is. **2**

(i) commutative ;

(ii) associative.

5. (a) Find the eigenvalues, and bases for the eigenspaces, of the matrix **6**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Is it diagonalisable ? If yes, find a diagonalisable matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. If A is not diagonalisable, find Adj (A).

(b) Use the Gram-Schmidt process to find an orthonormal basis of R^3 from the basis $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, where $\alpha_1 = (0, 0, 1)$; $\alpha_2 = (0, 1, 1)$ and $\alpha_3 = (1, 1, 1)$. Do you get the same result if this process is used on $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\}$? Give reasons for your answer. **4**

6. (a) Verify that $\theta : R^4 \to R^3$, given by **4**

$$\theta(x, y, z, t) = (x, y, z),$$

is a linear transformation, and find its Kernel. Also, give two distinct elements of

$$R^4 / \ker(\theta) \cdot$$

(b) If u_1, u_2, u_3 are elements of a vector space V such that $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, show that $[\{u_1, u_2\}] = [\{u_2, u_3\}] = [\{u_1, u_3\}]$, where [S] denotes the linear span of S. **3**

(c) (i) 'The product of 2 unitary matrices need not be unitary'. True or false ? Why ? **3**

(ii) If T is a unitary operator with characteristic polynomial $T^2 + \alpha T + I$, show that $T^* = -(T + \alpha I)$.

7. (a) Use the Gaussian Elimination method to find the value of α so that the system of equations. **6**

$$x + (\alpha + 4)y + (4\alpha + 2)\ z = 0$$
$$2x + 3\alpha y + (3\alpha + 4)\ z = 0$$
$$x + 2(\alpha + 1)y + (3\alpha + 4)\ z = 0$$

has (i) a unique solution ;

(ii) infinitely many solutions.

Further, find the solution set in each case.

(b) Let $f: R \to R$ and $g: R \to R$ be functions defined by $f(x) = x^3$ and $g(x) = x + 2$. **2**

(i) Find fog and gof.

(ii) Is gof 1-1 or onto ? Justify your answers.

(c) For a field k, prove or disprove that $k \times k$ is a field. **2**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-2 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 1 करना **ज़रूरी** है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों के लिए कारण बताइए। **10**

   (a) एक व्युत्क्रमणीय 3×4 आव्युह का अस्तित्व होता है।

   (b) कोई भी विषम सममित आव्यूह विकर्णनीय नहीं होता है।

   (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ (i-2j),\ \frac{2i + j + 5k}{\sqrt{30}}$, और $(2i+j-k)$, R^3 का लांबिक आधार बनाते हैं।

   (d) यदि किसी आव्यूह का अभिलक्षणिक बहुपद $(x-1)^2\ (x-2)^2$ है, तब इसका अल्पिष्ठ बहुपद $(x-1)^2$ हो सकता है।

   (e) $\{IGNOU,\ -1,\ 0.05\}$ एक समुच्चय है।

2. (a) मान लीजिए $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$. दिखाइए कि R^+, $\oplus$ और $\odot$ के सापेक्ष एक वास्तविक सदिश समष्टि है, जहां $\oplus$ और $\odot$ $a \oplus b = ab$ और $\alpha \odot a = a^{\alpha} \forall\ a, b \in R^+$ और $\alpha \in R$ द्वारा परिभाषित हैं। 5

(b) मान लीजिए S और T, S $(x, y, z) = (z, x, y)$ और T $(x, y, z) = (0, y, z)$ द्वारा परिभाषित R^3 पर रैखिक संकारक हैं। दिखाइए कि $\{T.S\}_B = [T]_B.[S]_B$, जहाँ B, R^3 का मानक क्रमित आधार है। 3

(c) मान लीजिए (V, <, >) एक आंतर गुणन समष्टि है। यदि W, V की उपसमष्टि है, तब 2

$W^{\perp} = \{v \in V | <v, w> = 0$ सभी $w \in W$ के लिए $\}$.

को परिभाषित कीजिए।

दिखाइए कि $W^{\perp}$, V की एक उपसमष्टि है।

3. (a) मान लीजिए $T = R^4 \to R^3$, 5

$T\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_3 + x_4)$.

द्वारा परिभाषित है।

(i) T की परिसर समष्टि और शून्य समष्टि दोनों के आधार ज्ञात कीजिए।

(ii) जाति-शून्यता प्रमेय का कथन दीजिए और T के लिए इसे सत्यापित कीजिए।

(b) $x^2 - 4xy + y^2 + 6\sqrt{2}\,(x - y) + 21 = 0$ को मानक रूप में समानीत कीजिए। इस तरह पहचान कीजिए कि यह समीकरण किस शांकव को निरूपित करता है। 5

4. (a) $T : R^3 \to R^3$ लीजिए, जिसके लिए : 6

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

जहाँ B, R^3 का मानक आधार है। क्या T व्युत्क्रमणीय है? यदि है तो $(x, y, z) \in R^3$ के लिए $T^{-1}(x, y, z)$ ज्ञात कीजिए। यदि T^{-1} का अस्तित्व नहीं होता, तो T का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए।

(b) A ज्ञात कीजिए, जहाँ A का सहखंडज 2

$\begin{bmatrix} 1-i & 2-5i \\ 2+5i & 1+i \end{bmatrix}$ है।

(c) जाँच कीजिए कि $a * b = ab^2$ द्वारा Z पर परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $*$, 2

(i) क्रमविनिमेय है या नहीं,

(ii) साहचर्य है या नहीं।

5. (a) आव्यूह 6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

के आइगेनमान और आइगेनसमष्टियों के आधार ज्ञात कीजिए। क्या यह विकर्णनीय है ? यदि है, तो एक ऐसा विकर्णयनीय आव्यूह P ज्ञात कीजिए जिसके लिए P^{-1} AP विकर्ण आव्यूह हो। यदि A विकर्णनीय नहीं है, तब Adj (A) ज्ञात कीजिए।

(b) ग्राम-श्मिट प्रक्रम लागू करके आधार $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ से R^3 का प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए, जहाँ $\alpha_1 = (0, 0, 1)$; $\alpha_2 = (0, 1, 1)$ और $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ हैं। यदि इसी प्रक्रम को $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\}$ पर लागू किया जाए, तो क्या समान परिणाम प्राप्त होगा ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 4

6. (a) सत्यापित कीजिए कि $\theta(x, y, z, t) = (x, y, z)$ द्वारा परिभाषित $\theta : R^4 \to R^3$ एक रैखिक रूपांतरण है, और इसकी अष्टि ज्ञात कीजिए। $R^4 / \ker(\theta)$. के दो अलग-अलग अवयव भी दीजिए। 4

(b) यदि u_1, u_2, u_3 एक सदिश समष्टि V के ऐसे अवयव हैं कि $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ तब दिखाइए कि $[\{u_1, u_2\}] = [\{u_2, u_3\}] = [\{u_1, u_3\}]$, जहाँ [S], S की रैखिक विस्तृति को निरूपित करता है। 3

(c) (i) 'ज़रूरी नहीं कि 2 ऐकिक आव्यूहों का गुणनफल ऐकिक हो।' यह कथन सत्य है या असत्य ? क्यों ? 3

(ii) यदि T अभिलक्षणिक बहुपद $T^2 + \alpha T + I$, वाला ऐकिक संकारक है, तब दिखाइए कि $T^* = -(T + \alpha I)$.

7. (a) गाउसीय निराकरण विधि से α के वे मान ज्ञात कीजिए जिनसे कि समीकरण-निकाय 6

$$x + (\alpha + 4)y + (4\alpha + 2)\ z = 0$$

$$2x + 3\alpha y + (3\alpha + 4)\ z = 0$$

$$x + 2(\alpha + 1)y + (3\alpha + 4)\ z = 0$$

का (i) अद्वितीय हल हो,

(ii) अनंततः अनेक हल हों। इसके आगे प्रत्येक स्थिति में हल समुच्चय ज्ञात कीजिए।

(b) मान लीजिए $f : R \to R$ और $g : R \to R$, $f(x) = x^3$ और $g(x) = x + 2$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। 2

(i) fog और gof ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या gof 1-1 है या आच्छादक है ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

(c) क्षेत्र k के लिए सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि $k \times k$ एक क्षेत्र है। 2