No. of Printed Pages : **12**

MTE-14

00905

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **any five** questions. All questions carry **equal** marks. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) State whether the modelling process for air pollution is : 3

(i) Static or dynamic ?

(ii) Descrete or continuous ?

(iii) Deterministic or stochastic ?

Give reasons in support of your answers.

(b) State the law used for the formulation of Gaussian model of dispersion. 2

(c) Discuss the static stability and dynamic stability for the following demand and supply functions : 3

$D_t = -0.8 \text{ pt} + 60,$

$S_t = -0.7 \text{ pt} + 40.$

(d) For a rain drop of diameter $d = 0.25$ cm find the terminal velocity. How long the drop takes to reach the ground if it starts its descent in a cloud 5000 m high ? 2

2. (a) Write two limitations of modelling planetary motion. 2

(b) Suppose the orbit of a planet around the Sun is a circle. The distance between Sun and Planet is 1.49×10^{11}m. and $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1}. Find the mass of the Sun. Assume that the time period of the planet is one year. 3

(c) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find 5

(i) the utilisation factor for this service facility.

(ii) the probability of two units in the system.

(iii) the expected number of units in the system

(iv) the expected time in hours that a customer has to spend in the system.

3. (a) Suppose that the population $x(t)$ and $y(t)$ satisfy the model given by the following system of equations : **7**

$$\frac{dx}{dt} = 8x - y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -6y + 6x^2,$$

Determine all the critical points of the system and discuss the type and stability of each of these critical points.

(b) Give one example each from the real world for the following along with justification for your example : **3**

(i) A non-linear model.

(ii) A deterministic model.

(iii) A logistic growth model.

4. (a) A particle is projected vertically upwards with a velocity u m/sec and after t seconds another particle is projected upwards from the same point and with same velocity. Prove that the two particles will meet at height **5**

$$\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g} \text{ metres after a time } \left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$$

seconds from the start.

(b) Suppose that a bird population P(t) is 100 initially and that none of the birds is dying. If the birth rate is (0.0005) P^2, then find when the bird population will be doubled ? Also find the time when the population will become infinitely large. **3**

(c) The respiratory flow of air in the lungs is affected due to air pollution. If you have to model respiratory flow, then write four essentials for the model. **2**

5. (a) The process of plucking of a guitar string results in the frequency of vibration (dimension $= \frac{1}{T}$) being a function of the Yung's modulus (same dimension as force per unit area), the length and the density of the string. Use dimensional analysis to derive an expression for the frequency of vibration of the string. **5**

(b) Players A and B play a game in which each has three coins - a 5 p, a 10 p and a 20 p. Each selects a coin without the knowledge of the other's choice. If the sum of the coins is an odd amount, then A wins B's coin. But if the sum is even, then B wins A's coin. Find the saddle point of the game, best strategy for each player and the value of the game. Is it a fair game ? Give reasons for your answer. **5**

6. (a) Find the bounds for velocity distribution in a fluid due to pressure gradient in a tube of radius r and length l. 3

(b) Assuming that the wind velocity u is in only one direction, the equation describing the dispersion of pollutants of concentration $C(x, t)$ is given by the equation. 7

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, 0 < x < h, t > 0$$

Where D is the diffusion coefficient of the pollutants and $0 < x < h$ is the region of interest. The initial and boundary conditions are given by :

$$C(x, 0) = 0,$$

$$C(0, t) = C_1 ; C(h, t) = C_2$$

Where C_1 and C_2 are constants. Find the concentration distribution $C(x, t)$.

[**Hint** : You may use the transformation $X = x - ut$]

7. (a) Return distributions of the two securities are as given in the table below : 6

Event	Chance	Return	
	$p_{1j} = p_{2j}$	R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	0.25	11	9

Find the correlation coefficient ρ_{12} of the two securities. What does the value of ρ_{12} suggest about the shape of the curve representing the set of portfolios of the two securities ?

(b) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of the mean position then find the angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$ of the pendulum where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) बताइए कि क्या वायु प्रदूषण की प्रक्रिया : 3

   (i) स्थैतिक है या गतिक ?

   (ii) असंतत है या संतत ?

   (iii) निर्धारणात्मक है या प्रसंभाव्य ?

   अपने उत्तर के पक्ष में कारण बताइए।

   (b) गाउसीय परिक्षेपण निदर्श के सूत्रण के लिए प्रयोग किया जाने वाला नियम लिखिए। 2

   (c) निम्नलिखित मांग फलन और पूर्त्ति फलन के लिए स्थैतिक और गतिक संतुलन की व्याख्या कीजिए। 3

   $D_t = -0.8\ pt + 60,$

   $S_t = -0.7\ pt + 40.$

(d) व्यास $d = 0.25$ cm वाली वर्षा-बिंदु का चरम वेग ज्ञात कीजिए। यदि वर्षा-बिंदु 5000 m की ऊँचाई पर स्थित बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है तो इसे भूमि तक पहुँचने में कितना समय लगेगा ? 2

2. (a) ग्रहीय गति निदर्शन की दो परिसीमाएँ लिखिए। 2

(b) मान लीजिए कि सूर्य के चारों ओर एक ग्रह की कक्षा वृत्ताकार है। सूर्य और ग्रह के बीच की दूरी 1.49×10^{11}m है, और $G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}$ है। सूर्य का द्रव्यमान आकलित कीजिए। मान कर चलिए कि ग्रह का आवर्त-काल एक साल है। 3

(c) किसी सेवा केन्द्र पर माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है। माध्य सेवा समय 10 मिनट प्रति सेवा है। प्वासों आगमन और चरघातांकीय सेवा समय की कल्पना करते हुए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 5

(i) सेवा सुविधा के लिए उपयोग गुणक,

(ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता,

(iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या,

(iv) प्रणाली में एक ग्राहक द्वारा घंटो में व्यतीत किया जाने वाला प्रत्याशित समय।

3. (a) मान लीजिए जनसंख्या $x(t)$ और $y(t)$ निम्नलिखित समीकरण निकाय द्वारा प्राप्त निदर्श को संतुष्ट करती है : 7

$$\frac{dx}{dt} = 8x - y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -6y + 6x^2.$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए और उनके प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए।

(b) निम्नलिखित के लिए वास्तविक जीवन से संबंधित एक-एक उदाहरण तर्कसंगत दीजिए : 3

(i) अरैखिक निदर्श

(ii) निर्धारणात्मक निदर्श

(iii) वृद्धिघात निदर्श

4. (a) एक कण को u m/sec के वेग से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंका गया और t सेकण्ड के बाद उसी बिंदु से उसी वेग के साथ एक दूसरे कण को भी ऊपर की ओर फेंका गया। सिद्ध कीजिए कि दोनों कण एक दूसरे से फेंके जाने के $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$sec. समय बाद ऊँचाई $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ मीटर पर मिलेंगे। 5

(b) मान लीजिए कि किसी पक्षी की जनसंख्या आरंभ में $P(t) = 100$ थी और पक्षियों की मृत्यु भी नहीं हो रही है। यदि जन्म दर $(0.0005)\ P^2$ हो तो बताइए कि पक्षी जनसंख्या कब दोगुनी हो जाएगी? वह समय भी ज्ञात कीजिए जब जनसंख्या अनन्ततः बृहत् हो जाएगी। 3

(c) फेफड़े में सांस लेने के दौरान वायु का प्रवाह प्रदूषण के कारण प्रभावित होता है। यदि आपको सांस लेने के प्रवाह का निदर्श करना हो तब निदर्श के लिए चार अनिवार्य तथ्य लिखिए। 2

5. (a) गिटार के तारों को झंकृत करने की प्रक्रिया से प्राप्त कंपन (विमा $= \frac{1}{T}$) की बारंबारता यंग के मापांक (विमा बल प्रति इकाई क्षेत्र के बराबर), तार की लम्बाई और घनत्व का फलन है। विमीय विश्लेषण द्वारा तार के कंपन की बारंबारता का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। 5

(b) दो खिलाड़ी A और B एक खेल खेलते हैं, जिसमें प्रत्येक के पास तीन सिक्के हैं - एक 5 पैसे का, एक 10 पैसे का, एक 20 पैसे का। प्रत्येक खिलाड़ी दूसरे को बताए बिना एक सिक्का चुनता है। यदि सिक्कों का जोड़ विषम हो, तो खिलाड़ी A खिलाड़ी B का सिक्का जीत जाता है। यदि जोड़ सम हो तो B, A का सिक्का जीत 5

जाता है। खेल का पल्याण बिंदु, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए सर्वोत्तम युक्ति और खेल का मान ज्ञात कीजिए। क्या यह खेल न्याय खेल है? अपने उत्तर का कारण बताइए।

6. (a) त्रिज्या r और लंबाई l वाली एक ट्यूब में दाब प्रवणता के कारण एक तरल के वेग के परिबंध ज्ञात कीजिए। 3

(b) यह मानकर कि पवन का वेग u केवल एक दिशा में है, सांद्रण $C(x, t)$ के प्रदूषकों के परिक्षेपण को निर्धारित करने वाला समीकरण निम्नलिखित है : 7

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\,\frac{\partial C}{\partial x} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},\ 0 < x < h,\ t > 0$$

जहाँ D प्रदूषकों का विसरण गुणांक है और $0 < x < h$ रूचि का क्षेत्र है। आदि और परिसीमा प्रतिबंध निम्नलिखित दिए गए हैं।

$$C(x, 0) = 0,$$
$$C(0, t) = C_1 \,;\, C(h, t) = C_2$$

जहाँ C_1 और C_2 अचर हैं। सांद्रण बंटन $C(x, t)$ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** यहाँ आप, रूपांतरण $X = x - ut$ का प्रयोग कर सकते हैं।]

7. (a) दो प्रतिभूतियों का प्रतिफल बंटन नीचे तालिका में दिया गया है : 6

घटना	संयोग $p_{1j} = p_{2j}$	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	0.25	11	9

दोनो प्रतिभूतियों का सहसंबंध गुणांक ρ_{12} ज्ञात कीजिए। दोनों प्रतिभूतियों की निवेश-सूचियों के समुच्चय को निरूपित करने वाले वक्र के आकार के बारे में ρ_{12} का यह मान क्या बतलाता है?

(b) यदि लम्बाई l का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर कोण α पर दोलायमान करता है तो लोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है। 4