

00948

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2011

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

## MTE-1 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

*Note : Question no. 1 is compulsory. Do any four questions from question no. 2 to 7. No calculators are allowed.*

1. Which of the following statements are **true** or **false** ? Justify your answers. **10**

(a) The function  $f$ , defined by  $f(x) = |x^2 - 3|$ , is differentiable at all points in  $[1, 2]$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$ .

(c) The curve  $y = \frac{5-4x}{x^2+2}$  has no asymptote parallel to the  $y$ -axis.

(d) The function  $f$ , defined by  $f(x) = x + \cos x$ , is monotonic in  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(e)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt \right] = \cos x$ .

2. (a) State Lagrange's Mean Value Theorem. 6  
 Can we use it to prove that,  
 $0 < [\ln(1+x)]^{-1} - x^{-1} < 1 \quad \forall x > 0$  ? If yes,  
 use the theorem to prove this inequality.  
 Otherwise, prove the Intermediate Value  
 Theorem.

- (b) Given a function  $f$ , defined by 4  
 $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ , and given  $L=3$ ,  $x_0=0$ ,  
 $\epsilon=0.1$ , find  $\delta>0$  such that  
 $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$ .

3. (a) Differentiate  $x^{\sin x} + (\sin x)^x$  with respect 4  
 to  $x$ .

- (b) A curve is drawn to pass through the points 3  
 given by the following table :

$x$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y$	2.5	2	2.4	2.7	2.8	3	2.6	2.1

Estimate the area bounded by the curve, the  
 $x$ -axis and the lines  $x=1$ ,  $x=4$ , using  
 Simpson's rule.

- (c) Evaluate 3

$$\int_0^2 \frac{(x-1)}{(x^2 - 4x + 5)} dx$$

4. Trace the curve :  $a^3x^2 = y^2(x+a)^3$ ,  $a > 0$ , clearly 10  
 stating all the properties you used' in the process.

5. (a) If  $\cos^{-1} \left( \frac{y}{b} \right) = \ln \left( \frac{x}{n} \right)^n$ , check whether or 5  
 not  $x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + n^2 y_n = 0$ .

(b) Evaluate 5

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x^2+4)}$$

6. (a) If  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx$ , ( $n \geq 1$ ), prove 5

that  $2 I_{n+1} = I_n + \frac{1}{n+1}$ . Hence evaluate  $I_2$ .

(b) Find the surface area of the solid formed by the rotation of the arc of the curve given by  $x = a(\theta + \sin \theta)$ ,  $y = a(1 + \cos \theta)$  about the  $x$ -axis. 5

7. (a) Find the length of the loop of the curve given by  $3ay^2 = x(x-a)^2$ , where  $a$  is a constant. 4

(b) A company charges Rs. 550/- for a transistor set with a discount of Rs. 5/- for each set ordered in excess of 50. Find the largest size of order that will maximize the revenue of the company. 4

(c) Find the domain of the function  $f$ , defined 2

$$\text{by } f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}.$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2011

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-1 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य या असत्य है? अपने 10

उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

(a)  $f(x) = |x^2 - 3|$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$ ,  $[1, 2]$  में सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय है।

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$ .

(c) वक्र  $y = \frac{5-4x}{x^2+2}$  की  $y$ -अक्ष के समांतर कोई अनंतस्पर्शी नहीं है।

(d)  $f(x) = x + \cos x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$ ,  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  में एकदिष्ट है।

(e)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt \right] = \cos x$ .

2. (a) लैंगरॉज माध्यम मान प्रमेय का कथन दीजिए। 6

$$0 < [\ln(1+x)]^{-1} - x^{-1} < 1$$

$\forall x > 0$  को सिद्ध करने के लिए क्या इसका प्रयोग किया जा सकता है? यदि हाँ, तो इस असमिका को इस प्रमेय से सिद्ध कीजिए। अन्यथा मध्यवर्ती मान प्रमेय सिद्ध कीजिए।

- (b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$  द्वारा परिभाषित एक फलन  $f$  दिया 4

गया है और  $L=3$ ,  $x_0=0$ ,  $\epsilon=0.1$  दिया गया है। तब एक ऐसा  $\delta > 0$  ज्ञात कीजिए जिसको कि  $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$  हो।

3. (a)  $x$  के सापेक्ष  $x^{\sin x} + (\sin x)^x$  को अवकलित कीजिए। 4

- (b) एक वक्र खींचा जाता है। यह निम्नलिखित सारणी में दिया गए बिन्दुओं से होकर गुजरता है : 3

$x$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$y$	2.5	2	2.4	2.7	2.8	3	2.6	2.1

सिम्प्सन नियम द्वारा वक्र  $x$ -अक्ष और रेखाएँ  $x=1$ ,  $x=4$ , द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (c)  $\int_0^2 \frac{(x-1)}{(x^2 - 4x + 5)} dx$  का मूल्यांकन कीजिए। 3

4. वक्र  $a^3 x^2 = y^2 (x+a)^3$ ,  $a > 0$ , का अनुरेखण कीजिए। ऐसा करने के लिए इस्तेमाल किए गए गुणधर्मों का स्पष्ट वर्णन कीजिए। 10

5. (a) यदि  $\cos^{-1} \left( \frac{y}{b} \right) = \ln \left( \frac{x}{n} \right)^n$ , तब जाँच कीजिए 5  
 $x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + n^2 y_n = 0$  है या नहीं।
- (b)  $\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x^2+4)}$  का मूल्यांकन कीजिए। 5
6. (a) यदि  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx$ , ( $n \geq 1$ ), तब सिद्ध 5  
 कीजिए कि  $2 I_{n+1} = I_n + \frac{1}{n+1}$  है। इस तरह  $I_2$  का  
 मूल्यांकन कीजिए।
- (b)  $x$ -अक्ष के प्रति  $x = a (\theta + \sin \theta)$ ,  $y = a (1 + \cos \theta)$  5  
 द्वारा दिए गए वक्र की चाप को घुमाने पर बनने वाली  
 घनाकृति के पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. (a)  $3ay^2 = x(x-a)^2$  द्वारा दिए वक्र के पाश की लंबाई 4  
 ज्ञात कीजिए, जहाँ  $a$  अचर है।
- (b) एक कंपनी के एक ट्रांसिस्टर की कीमत 550 रु. है। 4  
 50 से ज्यादा ट्रांसिस्टर लेने पर वह 5 रु. प्रति सेट पर  
 छूट देती है। आदेश का सबसे बड़ा आमाप ज्ञात कीजिए  
 जिससे कि कंपनी का राजस्व अधिकतम हो सके।
- (c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  का 2  
 ज्ञात कीजिए।