

00477

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)**Term-End Examination**

June, 2010

PHYSICS**PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN
PHYSICS-III***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50*

Note : Attempt all questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.

1. Attempt *any five* parts : 2x5=10

- (a) Write down the complex conjugate and transpose of the matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 4-i & 2 & 5 \\ 2 & 3i & 0 \\ -5+i & 8-9i & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Calculate the eigen values of the matrix :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Define symmetric and antisymmetric tensors of rank 2.

(d) Show that the function,

$$f(x, y) = 4xy - 3x + 2 \text{ is harmonic.}$$

(e) Determine the residue of :

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^2} \text{ at } z = ia$$

(f) Determine the type of singularity of the

$$\text{function : } \frac{1}{1 - e^z}$$

(g) Obtain the inverse Laplace transform of the

$$\text{function : } \frac{3s + 10}{s^2 - 25}$$

(h) Obtain the Fourier transform of the following function.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ e^{-\omega_0 t} & ; t \geq 0, \omega_0 > 0 \end{cases}$$

2. Attempt *any two* parts : 5x2=10

00477

(a) (i) Show that the eigen vectors belonging to distinct eigen values of a hermitian matrix are orthogonal to each other. 3

(ii) Define a contravariant tensor and covariant tensor of rank two. 2

(b) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix 5

$$\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta e^{i\phi} & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

(c) For the quadratic equation. 5

$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 5$, identify the conic section using the method of matrix diagonalization.

3. Attempt *any two* parts : 5x2=10

(a) Show that the contour integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

(b) Evaluate the integral

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} dz \text{ around the circle } |z| = 2$$

(c) Obtain the Laurent series expansion of

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} \text{ about } z = -1$$

4. Attempt *any two* parts : 5x2=10

(a) Solve the initial value problem

$$y'' - 4y = 4e^{2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

using the Laplace transformation method.

(b) Obtain the Fourier Sine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & x > \pi/2 \end{cases}$$

(c) Obtain the inverse Laplace transform of

$$\frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

5. Attempt *any two* parts :

5x2=10

(a) Evaluate the integral

$$\int_{-1}^1 x P_{n-1}(x) P_n(x) dx$$

(b) Using the generating function for Hermite polynomials :

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Obtain the orthogonality relation.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \pi^{1/2}$$

if $n = m$

(c) Using the Bessel function of the first kind and order m :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Establish the recurrence relation

$$\frac{m}{x} J_m(x) - \frac{d}{dx} J_m(x) = J_{m+1}(x)$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस.सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : सभी प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।
प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई पाँच भाग करें।

2x5=10

(a) निम्नलिखित आव्यूह का सम्मिश्र संयुग्मी तथा परिवर्त लिखें।

$$A = \begin{pmatrix} 4-i & 2 & 5 \\ 2 & 3i & 0 \\ -5+i & 8-9i & 2 \end{pmatrix}$$

(b) आव्यूह :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

के आइगेनमान परिकलित करें।

(c) कोटि 2 के सममित और असममित टेन्सर को परिभाषित करें।

(d) दिखाएं कि फलन,

$$f(x, y) = 4xy - 3x + 2 \text{ प्रसंवादी है।}$$

(e) फलन $\frac{1}{(z^2+a)^2}$ का $z = ia$ पर अवशिष्ट प्राप्त करें।

(f) निम्नलिखित फलन में विचित्रता का प्रकार

$$\text{बताएं : } \frac{1}{1-e^z}$$

(g) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त

$$\text{करें : } \frac{3s+10}{s^2-25}$$

(h) निम्नलिखित फलन का फूरिए रूपांतर प्राप्त करें :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ e^{-\omega_0 t} & ; t \geq 0, \omega_0 > 0 \end{cases}$$

2. कोई दो भाग करें।

5x2=10

(a) (i) सिद्ध करें कि हर्मिटी आव्यूह के भिन्न आइगेनमानों के संगत आइगेन सदिश एक दूसरे के प्रति लांबिक होते हैं। 3

(ii) कोटि 2 के सहपरिवर्ती और प्रतिपरिवर्ती टेन्सर को परिभाषित करें। 2

- (b) निम्नलिखित आव्यूह के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय 5
सत्यापित करें :

$$\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta e^{i\phi} & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

- (c) आव्यूह विकर्णन विधि का प्रयोग करते हुए बताइए कि 5
द्विघात समीकरण

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 5 \text{ किस शंकु परिच्छेद को} \\ \text{निरूपित करता है।}$$

3. कोई दो भाग करें।

5x2=10

- (a) सिद्ध करें कि कंटूर समाकल

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

- (b) निम्नलिखित समाकल को परिकलित करें :

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} dz \text{ जहाँ } C \text{ वृत्त } |z| = 2 \text{ है।}$$

- (c) $z = -1$ के प्रति $\frac{e^z}{(z+1)^2}$ का लौरां श्रेणी प्रसार प्राप्त
करें।

4. कोई दो भाग करें : 5x2=10

(a) लाप्लास रूपांतर लागू करके निम्नलिखित आदि-मान समस्या को हल करें।

$$y'' - 4y = 4e^{2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(b) निम्नलिखित फलन का फूरिए रूपांतर प्राप्त करें :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & x > \pi/2 \end{cases}$$

(c) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त करें :

$$\frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

5. कोई दो भाग करें : 5x2=10

(a) निम्नलिखित समाकल का मान प्राप्त करें :

$$\int_{-1}^1 x P_{n-1}(x) P_n(x) dx$$

(b) हर्मिट बहुपदों के लिए जनक फलन :

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित लांबिकता संबंध प्राप्त करें :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \pi^{1/2}$$

यदि $n = m$ है।

(c) प्रथम प्रकार और कोटि m वाले बेसल फलन :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

से निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को सिद्ध करें :

$$\frac{m}{x} J_m(x) - \frac{d}{dx} J_m(x) = J_{m+1}(x)$$