

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-8 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

03405

*Note : Q. No. 1 is compulsory. Attempt any four questions out of the remaining questions 2 - 7. Calculators are not allowed.*

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example : 5x2=10

- (a) The differential equation :

$(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$ , is an exact differential equation.

- (b) The form of trial solution for the differential equation :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = x^3 + \sin x$$

is  $y = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + x(E \sin x + F \cos x)$ .

(c) The partial differential equation  $(y + zx) p - (x + yz) q = x^2 - y^2$  is a semi-linear partial differential equation of first order.

(d) The partial differential equations :

$$xp - yq = 0,$$

$$z(xp + yq) = 2xy$$

are compatible.

(e) The partial differential equation :

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

is elliptic for all  $(x, y)$  inside the circle  $x^2 + y^2 = 1$ .

2. (a) Solve the simultaneous differential equation : **3**

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

(b) Solve the following differential equation by reducing it to normal form using change of dependent variable : **4**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 + 2) = e^{\frac{1}{2}(x^2 + 2x)}$$

03405

- (c) Solve the differential equation : 3

$$(1 - x^2 + 2y) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

3. (a) Verify that the Pfaffian differential equation : 4

$$3x^2 dx + 3y^2 dy - (x^3 + y^3 + e^{2z}) dz = 0$$

is integrable and hence find its integral.

- (b) Solve the differential equation : 3

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 5y = x^2 \sin(\ln x).$$

- (c) Solve the partial differential equation : 3

$$(D^2 - DD' - 6D'^2)z = xy.$$

4. (a) A string is stretched between the fixed points  $(0, 0)$  and  $(l, 0)$  and released at rest from the initial deflection given by : 7

$$f(x) = \begin{cases} 2kx & \text{when } 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \text{when } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Find the deflection of the string at time  $t$ .

- (b) Solve the differential equation : 3

$$4(x-2)^2 \frac{dy}{dx} = (x+y-1)^2.$$

5. (a) Solve the differential equation : 3  

$$(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x} \sin x.$$
- (b) Find the integrating factor of the differential equation : 2  

$$(x^2y - 2xy^2) dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0.$$
- (c) Find the integral surface of the equation : 5  

$$(x^2 - yz) p + (y^2 - zx) q = z^2 - xy$$
  
 passing through the line  $x = 1, y = 0.$
6. (a) Find the complete integral of the equation : 4  

$$p(1 + q^2) + (b - z) q = 0.$$
- (b) A simple series circuit has an inductor of 6  
 1 Henry, a capacitor of  $10^{-6}$  Farad, and a resistor of 1000 Ohms. The initial charge on the capacitor is zero. If a 12 volt battery is connected to the circuit, and the circuit is closed at  $t = 0$ , find the charge on the Capacitor 1 second later and the steady state charge.
7. (a) Write the ordinary differential equation : 3  

$$ydx + (xy + x - 3y)dy = 0,$$
  
 in the linear form, and hence find its solution.

(b) Solve :

4

$$\begin{aligned} & (D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D + 2D')z \\ & = e^{2x+3y} + \sin(2x+y). \end{aligned}$$

(c) Solve :

3

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}} \sin x.$$

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-8 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

**नोट :** प्रश्न सं.1 अनिवार्य है। शेष प्रश्न 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। लघु उपपत्रि या प्रति-उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए :

(a) अवकल समीकरण :  $5 \times 2 = 10$

$(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$ , यथातथ अवकल समीकरण है।

(b) अवकल समीकरण :

$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = x^3 + \sin x$  के जाँच हल का रूप

$y = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + x(E \sin x + F \cos x)$ .

है।

(c) आंशिक अवकल समीकरण  
 $(y + zx) p - (x + yz) q = x^2 - y^2$  प्रथम कोटि का  
 सामिखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

(d) आंशिक अवकल समीकरण :

$$xp - yq = 0,$$

$$z(xp + yq) = 2xy$$

सुसंगत हैं।

(e) आंशिक अवकल समीकरण :

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  के अंदर सभी  $(x, y)$  के लिए  
 दीर्घवृत्तीय है।

2. (a) युगपत अवकल समीकरण : 3

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

को हल कीजिए।

(b) स्वतंत्र चर परिवर्तन से निम्नलिखित अवकल समीकरण 4

को प्रसामान्य रूप में समानीत करके हल कीजिए :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 + 2) = e^{\frac{1}{2}(x^2 + 2x)}$$

(c) अवकल समीकरण : 3

$$(1 - x^2 + 2y) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

का हल प्राप्त कीजिए।

3. (a) जाँच कीजिए कि फैफियन अवकल समीकरण : 4

$$3x^2 dx + 3y^2 dy - (x^3 + y^3 + e^{2z}) dz = 0$$

समाकलनीय है और फिर इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

(b) अवकल समीकरण : 3

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 5y = x^2 \sin(\ln x)$$

को हल कीजिए।

(c) आंशिक अवकल समीकरण : 3

$$(D^2 - DD' - 6D'^2)z = xy$$

को हल कीजिए।

4. (a) एक डोरी को दो नियत बिन्दुओं  $(0, 0)$  और  $(l, 0)$  के 7

बीच खींचा गया और आरंभिक विस्थापन जो कि

निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} 2kx & \text{when } 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l} (l - x) & \text{when } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

से विरामावस्था से छोड़ा गया। किसी भी समय  $t$  पर

डोरी का विस्थापन ज्ञात कीजिए।



- (b) अवकल समीकरण : 3  

$$4(x-2)^2 \frac{dy}{dx} = (x+y-1)^2.$$
को हल किजिए।
5. (a) अवकल समीकरण : 3  

$$(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x} \sin x$$
को हल कीजिए।
- (b) अवकल समीकरण : 2  

$$(x^2y - 2xy^2) dx - (x^3 - 3x^2y) dy = 0$$
का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए।
- (c) अवकल समीकरण : 5  

$$(x^2 - yz) p + (y^2 - zx) q = z^2 - xy$$
का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो रेखा  $x=1, y=0$  से होकर जाता है।
6. (a) समीकरण : 4  

$$p(1+q^2) + (b-z) q = 0$$
का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।
- (b) एक सरल श्रेणी परिपथ में 1 हैनरी का एक प्रेरक, 6  
 $10^{-6}$  फैरड का संधारित्र और 1000 ओम का प्रतिरोधक है। संधारित्र पर आरंभिक आवेश शून्य है। यदि परिपथ में 12 वोल्ट की बैटरी जोड़ दी जाती है और परिपथ के  $t=0$  पर बंद कर दिया जाता है तो संधारित्र में 1 सेकेंड बाद होने वाला आवेश और स्थायी अवस्था आवेश ज्ञात कीजिए।

7. (a) साधारण अवकल समीकरण : 3

$$ydx + (xy + x - 3y)dy = 0, \text{ को}$$

रैखिक रूप में लिखिए, और इसके बाद इसका हल ज्ञात कीजिए।

(b) निम्नलिखित को हल कीजिए : 4

$$(D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D + 2D')z \\ = e^{2x+3y} + \sin(2x + y).$$

(c) निम्नलिखित को हल कीजिए : 3

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 e^{x^2/2} \sin x.$$

---