No. of Printed Pages : 8 **MTE-7**

03694

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-7 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : ***Question No. 1*** *is* ***Compulsory****. Solve* ***any four*** *form Question No.* **2** *to* **7** *Calculators are* **not** *allowed.*

1. State whether the following statements are **true** or **false**. Give reasons : **10**

(a) The function $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = e^{\cos\pi}$ is continuous at (1, 2).

(b) The domain of f/g, where

$f(x, y) = 2\sin x + \sin y$ and $g(x, y) = \frac{1}{x^2} \cos y$

is $\mathbf{R}^2 - \{(0, \pi/2)\}$.

(c) Function $F(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$ is not a homogeneous function.

(d) Every stationary point is a saddle point.

(e) The mass of a cube $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ with density given by $\delta(x, y, z) = 1 + x$ is $3/2$.

2. (a) Evaluate the following limits : 5

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$

(b) Show that the function f defined by 5

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x-y)^2 + x^2 y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$
$$= 0 \quad , \quad (x, y) = (0, 0)$$

is discontinuous at the origin.

3. (a) Describe and draw a rough sketch of the level curves of $f(x, y) = x^2 + y$. 2

(b) If $u = x^2 + e^{y^2}$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t^2$, find $\frac{du}{dt}$ using the chain rule. 3

(c) Check whether the repeated limits of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, defined by 5

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$
$$= 0 \quad , (x, y) = (0, 0)$$

exists or not ? Does the simultaneous limit exist ? Justify your answer.

4. (a) Find the area of the region bounded by $y=x^2$ and $x=y^2$. **3**

(b) Find an approximation to the function $f(x, y)=sin(x+2y)$ by a second degree polynomial at $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. **5**

(c) Check if the function $F:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, defined by $F(x, y)=\left(e^{xy}, e^{x+y}\right)$ is conservative. **2**

5. (a) Find the points (x, y) on the unit circle at which the product xy is maximum ? **5**

(b) Draw a sketch of the region of integration in $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx dy$ and evaluate by reversing the order of integration. **5**

6. (a) Find the directional derivative of the function $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y)=e^{xy}$ at $(1, 0)$ in the direction $\theta = \frac{\pi}{3}$. **3**

(b) Calculate the Jacobian for the following mapping : **3**

$w=x^2+\cos y,\ z=ye^x$ at $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) Calculate the work done by a force $F=(4x^2y, 2xy^2)$ in moving a particle from $(0, 0)$ to $(1, 1)$ along $y=x^2$. **4**

7. (a) Using cylindrical coordinates, evaluate 4

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2 \, dz\,dy\,dx.$$

(b) State Implicit Function Theorem for two variables. Use the Theorem to show that there exists a unique solution of the equation $x^{e^y} + y^{e^x} = 0$ in a neighbourhood of the point (0, 0). 3

(c) If $a = (1, 2)$ and $b = (2, 0)$ are two points in R^2, then find $|x - y|$ and $|3x - y|$, where $x = a - 2b$ and $y = 2a + b$. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-7 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई* ***चार*** *प्रश्न कीजिए। कैलक्युलेटर का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

1. बताइए निम्नलिखित में से कौन कथन **सत्य** या **असत्य** हैं। कारण बताइए। **10**

(a) $f(x, y) = e^{\cos\pi}$ द्वारा परिभाषित, फलन $f : R^2 \to R$, (1, 2) पर संतत है।

(b) f/g का प्रांत $\mathbf{R}^2 - \{(0, \pi/2)\}$. है जहाँ $f(x, y) = 2\sin x + \sin y$ और $g(x, y) = \frac{1}{x^2}\cos y$.

(c) फलन $F(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$ समघात फलन नहीं है।

(d) प्रत्येक स्तब्ध बिन्दु एक पल्याण बिन्दु होता है।

(e) $f(x, y, z) = 1 + x$ द्वारा परिभाषित घनत्व वाले घन $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ का द्रव्यमान 3/2 है।

2. (a) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : 5

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x} \right)$

(b) दिखाइए कि : 5

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x-y)^2 + x^2 y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$
$$= 0 \quad , \quad (x, y) = (0, 0)$$

द्वारा परिभाषित फलन f मूलबिन्दु पर असंतत है।

3. (a) $f(x, y) = x^2 + y$ के स्तर वक्रों का वर्णन कीजिए और एक स्थूल चित्र बनाइए। 2

(b) यदि $u = x^2 + e^{y^2}$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t^2$ शृंखला नियम से $\dfrac{du}{dt}$ ज्ञात कीजिए। 3

(c) जाँच कीजिए कि 5

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$
$$= 0 \quad , (x, y) = (0, 0)$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ की पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व है या नहीं? क्या युगपत् सीमा का अस्तित्व है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

4. (a) $y=x^2$ और $x=y^2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

(b) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ पर द्वितीय घात बहुपद द्वारा फलन $f(x, y)=sin(x+2y)$ का सन्निकटन ज्ञात कीजिए। 5

(c) जाँच कीजिए कि क्या फलन $F(x, y) = \left(e^{xy}, e^{x+y}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, संरक्षी है या नहीं। 2

5. (a) इकाई वृत्त पर ऐसे बिन्दु (x, y) ज्ञात कीजिए जिन पर गुणनफल xy उच्चिष्ठ हो। 5

(b) समाकलन $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx dy$ के प्रदेश, का लेखाचित्र बनाइए और समाकलन का क्रम उल्टा करके उसका मूल्यांकन कीजिए। 5

6. (a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, दिशा $\theta = \frac{\pi}{3}$ मे $(1, 0)$ पर $f(x, y)=e^{xy}$ का दिक् अवकलन ज्ञात कीजिए। 3

(b) निम्नलिखित रूपांतरण के लिए $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ पर जैकोबी ज्ञात कीजिए : 3

$w=x^2+cosy,\ z=ye^x.$

(c) $y=x^2$ के अनुदिश $(0, 0)$ से $(1, 1)$ तक कण को ले जाने में प्रयुक्त बल $F=(4x^2y, 2xy^2)$ द्वारा किए गए कार्य को परिकलित कीजिए। 4

7\. (a) बेलनी निर्देशांकों का प्रयोग करके निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : **4**

$$\int_{-z}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2 \, dz\,dy\,dx.$$

(b) दो चरों के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय का कथन दीजिए। इस प्रमेय द्वारा दिखाइए कि बिन्दु (0, 0) के प्रतिवेश में समीकरण $x^{e^y} + y^{e^x} = 0$ के अद्वितीय हल का अस्तित्व होता है। **3**

(c) R^2 के दो बिन्दुओं $a = (1, 2)$ और $b = (2, 0)$ के लिए $|x - y|$ और $|3x - y|$ ज्ञात कीजिए जहाँ $x = a - 2b$ और $y = 2a + b$. **3**
