01211

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE - 6 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt* ***Five*** *questions in all. Question no. 7 is* ***compulsory.*** *Answer* ***any four*** *questions from questions no.***1** *to* ***6*** *calculators are* ***not*** *allowed.*

1. (a) Find the signatures of the permutations **4**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Also

Show that there is no permutation σ in S_4 that satisfies

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} 0\, \sigma = \sigma\, 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Show that 2 is an irreducible element in $\mathbf{Z}\left[\sqrt{5}\right]$, but not a prime element. **4**

(c) Let $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \right\}$. Is the usual matrix multiplication a binary operation on G ? Give reasons for your answer. **2**

2. (a) On $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ define a relation by (x_1, y_1) is related to (x_2, y_2) if and only if $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ check whether this is an equivalence relation or not. If it is represent the equivalence classes algebraically and geometrically. If the relation is not an equivalence relations, define a relation on $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ which is an equivalence relation. **3**

(b) Find an element of order 30 in S_{11}. Justify your choice of element. **2**

(c) Let $I = \langle x-7, 15\rangle$ in $Z[x]$. Give two distinct non-trivial element of $R = Z[x]/I$. Further, if $\phi : Z[x] \to Z[x] : \phi(f(x)) = f(x+7)$, then show that ϕ is a ring automorphism. **5**

3. (a) Let G be a group and $Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \ \forall \ x \in G\}$. If $G/Z(G)$ is cyclic, then show that G is an abelian group. **4**

(b) Let $G = \{a \in R \mid a \neq -1\}$. Define * on G by $a*b = a + b + ab \ \forall \ a, b \in G$ show that $(G, *)$ is a group **4**

(c) Give a maximal ideal of $Z_7[x]$, with justification 2

4. (a) Apply the principle of induction to show that $2^{2n} - 1$ is divisible by 3 for all $n \in N$ 3

(b) Let $M_2(Z)$ be the ring of all 2×2 matrices over integers and let 3

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in Z \right\}.$$ Check

whether R is a subring of $M_2(Z)$ or not.

(c) Let R and R′ be commutative rings. Let $f : R \to R'$ be an onto homomorphism. If I an ideal of R, is F (I) also an ideal of R′ ? If f is not surjective, then must f (I) be an ideal of R′ ? Give reasons for your answers. 4

5. (a) Show that $\mathbf{R}[x] \big/ \langle x^2+1 \rangle$ is isomorphic to the field **C**. 6

(b) Give examples of groups H,K and G such that $\frac{K}{H}$ and $\frac{G}{K}$ are groups but $\frac{G}{H}$ is not a group. Justify your answer. 4

6. (a) Let G be a cyclic group of order 15. Find all the elements of order 15 in G. Give reasons for your answer. **3**

(b) Show that an ideal I in **C**[x] is a prime ideal if and only if $I = (0)$ or $I = \langle x - a \rangle$ where $a \in$ **C**. **5**

(c) Does there exist a ring with 16 elements ? Justify your answer. **2**

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers. **10**

(a) If $f(x) \in R[x]$, where R is a ring, then the number of roots of $f(x)$ in R can be more than deg F .

(b) Char $\frac{Z[x]}{\langle f(x) \rangle} = \deg f(x)$

(c) If k is a field, then so is k[x]

(d) If A,B,C are three sets such that $A \cup B = A \cup C$, then $B = C$

(e) $S_m \times S_n \simeq S_{mn}$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
सत्रांत परीक्षा
जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.- 06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. स. 7 **(सात)** करना **ज़रुरी** है। प्र. सं 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमती **नहीं** है।*

---

1. (a) क्रमचयों **4**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ और $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ के चिह्नक ज्ञात कीजिए। यह भी दिखाइए कि S_4 में कोई ऐसा क्रमचय σ नहीं है जो :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} 0\, \sigma = \sigma\, 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ को

संतुष्ट करता है।

(b) दिखाइए कि 2, $Z\left[\sqrt{5}\right]$ में अखंडनीय अवयव है लेकिन अभाज्य अवयव नहीं है। **4**

(c) मान लीजिए $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R} \right\}$. क्या आम आव्यूह गुणन G पर द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर के कारण बताइए। **2**

2. (a) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ से संबद्ध है, यदि और केवल यदी $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ द्वारा $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ पर एक संबंध परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि यह संबंध तुल्यता संबंध है या नहीं। यदि है, तो बीजगणितीय और ज्यामितीय रूप से तुल्यता वर्गों को निरूपित कीजिए। यदि संबंध तुल्यता संबंध नहीं हैं, तो $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ पर एक ऐसा संबंध परिभाषित कीजिए जो तुल्यता संबंध हो। **3**

(b) S_{11} में कोटि 30 वाला अवयव ज्ञात कीजिए। अपने अव्यव के चयन की पुष्टि कीजिए। **2**

(c) मान लीजिए $\mathbf{Z}[x]$ में $I = \langle x-7, 15 \rangle$. $R = \mathbf{Z}[x]/I$ के दो अलग-अलग अतुच्छ अवयव बताइए। इसके आगे, यदि $\phi : \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x] : \phi(f(x)) = f(x+7)$, तब दिखाइए कि ϕ एक वलय स्वाकारिता है। **5**

3. (a) मान लीजिए G एक समूह है और $Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \ \forall \ x \in G\}$. यदि $G/Z(G)$ चक्रिय है, तब दिखाइए कि G एक आबेली समूह है। **4**

(b) मान लीजिए $G = \{a \in R \mid a \neq -1\}$. $a*b = a + b + ab \ \forall \ a, b \in G$ द्वारा G पर * परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि (G, *) एक समूह है। **4**

(c) पुष्ठि सहित $Z_7[x]$ की एक उच्चिष्ठ गुणजावली दीजिए। 2

4. (a) आगमन नियम द्वारा दिखाइए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $2^{2n}-1$ उसे विभाज्य है। 3

(b) मान लीजिए $M_2(\mathbf{Z})$ पूर्णांको पर सभी 2×2 आव्यूहों का वलय है और मान लीजिए कि : 3

$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in Z \right\}$. जाँच कीजिए कि R, $M_2(\mathbf{Z})$ का उपवलय है या नहीं।

(c) मान लीजिए R और R′ क्रमविनिमेय वलय हैं। मान लीजिए $f : R \to R'$ आच्छादक समाकारिता है। यदि I, R की एक गुणजावली है, तब क्या F (I) भी R′ की गुणजावली होगी? यदि f अच्छादक नहीं है, तब क्या f (I) R′ की गुणजावली ज़रूर होगी? तब अपने उत्तरों के कारण बताइए। 4

5. (a) दिखाइए कि $\mathbf{R}[x] \big/ \langle x^2+1 \rangle$ क्षेत्र **C** के तुल्याकारी है। 6

(b) ऐसे समूहों H,K और G के उदाहरण दीजिए जहाँ $\frac{K}{H}$ और $\frac{G}{K}$ समूह हैं, लेकिन $\frac{G}{H}$ समूह नहीं है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

6. (a) मान लीजिए G कोटि 15 का चक्रीय समूह है। G में कोटि 15 के सभी अवयव ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर के कारण बताइए। 3

(b) दिखाइए कि $C[x]$ में गुणजावली I एक अभाज्य गुणजावली है, यदि और केवल यदि $I = (0)$ या $I = \langle x - a \rangle$ जहाँ $a \in C$. 5

(c) क्या 16 अवयवों वाला कोई वलय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य है? अपने उत्तरों के कारण बताइए। 10

(a) यदि $f(x) \in R[x]$, जहाँ R एक वलय है, तब R में $f(x)$ के मूलों की संख्याघात f से ज्यादा हो सकती है।

(b) $\text{Char}\ \frac{Z[x]}{\langle f(x) \rangle} = \deg f(x)$

(c) यदि k एक क्षेत्र है, तब $k[x]$ भी क्षेत्र होगा।

(d) यदि A,B,C ऐसे समुच्चय हैं जहाँ $A \cup B = A \cup C$, तब $B = C$.

(e) $S_m \times S_n \simeq S_{mn}$