

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

MATHEMATICS

MTE-5 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Note : Question no. 5 is compulsory. Do any three questions from Questions no. 1 to 4. No Calculators are allowed.

1. (a) Find the equations of the tangent and normal, at the point $(a \sec \theta, b \tan \theta)$, to the

hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- (b) Prove that $3x + 5y = z$ touches the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, if and only if

$$\frac{9}{a} + \frac{25}{b} + \frac{1}{c} = 0, \text{ where } a, b, c \text{ are non-zero}$$

real numbers.

2. (a) Identify the conic represented by, $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$.
If it is central, find its centre and its equation when the origin is shifted to the centre. If it is not central, find its latus rectum.

- (b) Sketch the surface given by 2

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - z^2 = 1. \text{ Check whether the}$$

coordinate planes intersect the surface. If so, what are the objects represented by the curves of intersection ?

3. (a) Find the distance of the point 2
 $(-1, -5, -10)$ from the point of intersection of the line

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12} \text{ and the plane}$$

$$x - y + z = 5.$$

- (b) Show that the equation, 3

$4y^2 - 4z^2 - 2x - 14y - 22z + 33 = 0$
represents a paraboloid. Is it elliptic or hyperbolic ? Give reasons for your answer.

4. (a) Prove that the plane $x + 2y - z = 4$ cuts the 2
sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + z = 2$ in a circle of radius 1. Also find the centre of the circle.

- (b) Find the equations to the tangent planes to 3
 $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ which pass through the line $7x - 6y + 9 = 0, z = 3$.

5. Are the following statements **true** or **false**? Give 10 reasons in support of your answers.
- (a) The equation $r = 2a \cos(\theta - \alpha)$ represents hyperbola.
 - (b) The circle $x^2 + y^2 = 1$ intersects the parabola $y^2 = 4(x - 1)$ in two distinct real points.
 - (c) If a conicoid is such that it has some planar sections which are ellipses, then it must be an ellipsoid.
 - (d) A right circular cylinder has infinitely many centres.
 - (e) The projection of the line segment joining the points $(1, 3, -1)$ and $(2, -1, 4)$ on the line with direction ratios 3, 5, 4 is 3.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

गणित

एम.टी.ई.-5 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न 5 करना जरूरी है। प्रश्न सं. 1 से 4 में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) बिन्दु $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ पर अतिपरवलय 2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

की स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण मालूम कीजिए।

(b) सिद्ध कीजिए कि $3x + 5y = z$ शंकु 3

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

को स्पर्श करता है यदि और केवल यदि $\frac{9}{a} + \frac{25}{b} + \frac{1}{c} = 0$, जहाँ a, b, c शून्येतर वास्तविक

संख्याएँ हैं।

2. (a) $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ द्वारा 3
 निरूपित शांकव को पहचानिए। यदि यह केन्द्रीय है, तब इसका केन्द्र और मूल बिन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित करने पर इसका समीकरण मालूम कीजिए। यदि यह केन्द्रीय नहीं है तब इसका नाभिलंब ज्ञात कीजिए।
- (b) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - z^2 = 1$ द्वारा दिए गए पृष्ठ का रेखाचित्रण 2
 कीजिए। जाँच कीजिए कि निर्देशांक समतल पृष्ठ को प्रतिच्छेदित करते हैं या नहीं। यदि ऐसा है, तो वे कौन-सी वस्तुएँ हैं जो प्रतिच्छेद वक्रों से निरूपित होती हैं?
3. (a) रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ और समतल 2
 $x - y + z = 5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु की बिन्दु $(-1, -5, -10)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।
- (b) दिखाइए कि समीकरण, 3
 $4y^2 - 4z^2 - 2x - 14y - 22z + 33 = 0$ एक परवलय को निरूपित करता है। यह दीर्घवृत्तीय है या अतिपरवलयिक? अपने उत्तर के कारण बताइए।

4. (a) सिद्ध कीजिए कि समतल $x + 2y - z = 4$ त्रिज्या 1 वाले वृत्त में गोले $x^2 + y^2 + z^2 - x + z = 2$ को काटता है। वृत्त का केन्द्र भी ज्ञात कीजिए। 2
- (b) रेखा $7x - 6y + 9 = 0, z = 3$ से गुजरने वाले $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ के स्पर्श तलों के समीकरण ज्ञात कीजिए। 3
5. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के पक्ष में कारण बताइए। 10
- (a) समीकरण $r = 2a \cos(\theta - \alpha)$ एक अतिपरवलय को निरूपित करता है।
- (b) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ दो अलग-अलग वास्तविक बिन्दुओं में परवलय $y^2 = 4(x - 1)$ को प्रतिच्छेद करता है।
- (c) यदि एक ऐसा शांकवज है जिनके कुछ समतल पृष्ठ दीर्घवृत्त हैं तब शांकवज दीर्घवृत्तज ही होगा।
- (d) एक समवृत्तीय बेलन के अनंततः अनेक केंद्र होते हैं।
- (e) दिक-अनुपातों 3, 5, 4 वाली रेखा पर बिन्दुओं $(1, 3, -1)$ और $(2, -1, 4)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड का प्रक्षेप 3 है।