No. of Printed Pages : **12** **MTE-11**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2010

02330

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Question No. 7 is **Compulsory**. Answer **any four** questions from question nos. **1** to **6**. Calculators are **not** allowed.*

---

1. (a) If $X_1, X_2, \dots X_n$ is a random sample from Poisson distribution with parameter λ, show that sample mean $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ and $S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ both are unbiased estimator of λ. **3**

(b) A_1, A_2, A_3 and A_4 are arbitrary events. Write in set notation the following events. **3**

(i) only A_2 and A_3

(ii) none of A_1, A_2, A_3 and A_4

(iii) exactly one of A_1, A_2, A_3 and A_4

(iv) not more than one of A_1, A_2, A_3 and A_4

(v) at least two of A_1, A_2, A_3 and A_4

(c) Define coefficient of skewness and Kurtosis. Prove that coefficient of Kurtosis is always greater than one. **4**

2. (a) The equations of pair of regression lines are $y = 10 + 6x$ and $y = 24x + 15$, estimate the value of X for $Y = 39$ and y for $x = 16$. **2**

(b) An explosion in a factory manufacturing explosives can occur because of (i) leakage of electricity (ii) defect in machinery (iii) carelessness of workers or (iv) sabotage. The probability that (i) there is leakage of electricity is 0.20 ; (ii) the machinery is defective is .30 ; (iii) the workers are careless is 0.40 and (iv) there is sabotage is 0.10. The engineers feel that probability of explosion due to (i) leakage of electricity is 0.25 ; (ii) defects in machinery is 0.20 ; (iii) carelessness of workers is 0.50 and (iv) sabotage is 0.75 which is the most likely cause of explosion ? **3**

(c) (X, Y) has the joint probability density **5**

function $f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{if } 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$.

obtain regression of Y on X and X on Y.

3. (a) Develop a test, based on a single X observation having p.d.f. $f(x)$, for testing 3

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ against}$$

02330

$$H_1 : f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$ write expression for size and power of the test.

(b) Draw the 'less than' and 'more than' Ogives for the following data and hence estimate the median. 5

Class Interval	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79
Frequency	8	32	142	216	240	206	143	13

Also, compare the value of the median computed by using the formula.

(c) The diameter of an electric cable, say X, is assumed to be a continuous random variable with p.d.f given by $f(x) = 6x(1-x)$, $0 \le x \le 1$. 2

(i) check that f (x) is p.d.f., and

(ii) determine a number b such that $p(x<b) = P(x>b)$

4. (a) Let $X_1, X_2, .. X_n$ be a random sample of size n from a distribution with probability density function 4

$$f(x\,;\,\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0<X<1,\ \theta>0$$
$$= 0, \quad \text{otherwise}$$

Obtain a maximum likelihood estimator of θ.

(b) The first four moments of a distribution about the value 4 are -1.5, 17, -30 and 108. Find the moments about mean. Also, find the moments about origin. **6**

5. (a) X and Y are two random variables having the joint density function $f(x, y) = \frac{1}{27}(2x + y)$, where x and y can assume only the integer values 0, 1 and 2. Find the conditional distribution of Y for $X = x$. **6**

(b) Local trains arrive at a specified station at every 15 – minutes intervals starting from 7 : 00 am onwards. If a passenger arrives at the station at a time that is uniformly distributed between 7 : 00 am and 7 : 30 am, find the probability that the passenger has to wait for less than 5 minutes for a train. **4**

6. (a) A random sample of 200 articles selected from a batch of 5000 articles shows that the average diameter of the articles is 0.75 cm, find 95% confidence limit for the population mean. **3**

(b) If 2% of the electrical bulbs manufactured by a certain company are defective, then find the probability that in a sample of 200 bulbs. **4**

(i) less than 2 bulbs are defective

(ii) more than 3 bulbs are defective

[You may like to use the following values $e^{-4} = 0.0183$, $e^{-2.5} = 0.0821$].

(c) Let $X_1, X_2, .. X_n$ be a random sample from N (μ, σ^2), σ^2 known. For testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta > \theta_0$, find α level UMP test. Also find the power function of the test. **3**

7. State whether the following statements are **true** or **false**. Give reasons for your answers : **5x2=10**

(a) Rejecting null hypothesis when it is true is type II error.

(b) The probability curve of chi-square variable with degrees of freedom less than or equal to two is J-shaped.

(c) Frequency polygon cannot be traced if class intervals are not of equal width.

(d) If (X, Y) has joint p.d.f

$$f(x, y) = 8xy,\ 0 < x < y < 1$$

then X and Y are independent.

(e) For any five events, happening of at least two events and not happening of more than one are complementary events.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न संख्या 7 करना* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से* ***कोई चार*** *प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *हैं।*

1. (a) यदि $X_1, X_2, \ldots X_n$ प्राचल λ वाले प्वासा बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो दर्शाइए कि प्रतिदर्श माध्य $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Xi$ तथा $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Xi - \bar{X}\right)^2$ दोनों ही λ के अनमिनत आकलक हैं। 3

   (b) A_1, A_2, A_3 और A_4 स्वैच्छिक घटनाएँ हैं। निम्नलिखित घटनाओं को समुच्चय संकेतन में लिखिए : 3

   (i) केवल A_2 और A_3

   (ii) A_1, A_2, A_3 और A_4 में से कोई भी नहीं।

   (iii) A_1, A_2, A_3 औरA_4 में से ठीक एक।

(iv) A_1, A_2, A_3 और A_4 में से एक से अधिक नहीं।

(v) A_1, A_2, A_3 और A_4 में से कम से कम दो।

(c) विषमता तथा ककुदता के गुणांक को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि ककुदता का गुणांक सदैव एक से अधिक होता है। 4

2. (a) समाश्रयण रेखाओं के युग्म की समीकरण $Y = 10 + 6X$ तथा $Y = 24X + 15$ हैं। $Y = 39$ के लिए X का मान तथा $X = 16$ के लिए Y का मान आकलित कीजिए। 2

(b) विस्फोटक पदार्थ निर्मित करने वाली किसी फैक्ट्री में, (i) विद्युत के च्यवन (रिसाव), (ii) मशीनरी में खराबी, (iii) कर्मियों की लापरवाही या (iv) तोड़-फोड़ के कारण विस्फोट हो सकता है। इसकी प्रायिकता कि (i) विद्युत का च्यवन हो 0.20 है; (ii) मशीनरी खराब है, 0.30 है ; (iii) कर्मी लापरवाह हैं 0.40 है तथा (iv) तोड़-फोड़ होगी 0.10 है। इंजीनियर यह अनुभव करते हैं कि : 3

(i) विद्युत के च्यवन की प्रायिकता 0.25 है;

(ii) मशीनरी में खराबी की प्रायिकता 0.20 है ;

(iii) कर्मियों के लापरवाह होने की प्रायिकता 0.50 है तथा

(iv) तोड़-फोड़ की प्रायिकता 0.75 है। विस्फोट होने का सबसे अधिक संभाव्य कारण कौन सा है?

(c) (X, Y) का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन 5

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } 0 < x < y < 1 \text{ है।} \\ 0, & \text{अनन्य स्थिति में} \end{cases}$$

X पर Y का समाश्रयण तथा Y पर X का समाश्रयण प्राप्त कीजिए।

3. (a) प्रा.ध.फ. $f(x)$ वाले एक एकल X प्रेक्षण पर आधारित, 3

$H_1 : f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ के विरुद्ध

$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ की जाँच करने के लिए, एक परीक्षण विकसित कीजिए। इस टेस्ट के आभाप और घात के लिए व्यंजक लिखिए।

(b) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, 'से कम' और 'से अधिक' तोरण खींचिए तथा फिर माध्यिका का आकलन कीजिए। 5

वर्ग अंतराल	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79
बारंबारता	8	32	142	216	240	206	143	13

साथ ही, माध्यक के इस मान की सूत्र द्वारा अभिकलित मान से तुलना कीजिए।

(c) बिजली के एक तार के व्यास, मान लीजिए, x, को एक सतत यादृच्छिक पर कल्पित किया जाता है, जिसका प्रा.ध.फ. निम्नलिखित है : 2

$f(x) = 6x(1-x), \; 0 \le x \le 1.$

(i) जाँच कीजिए कि $f(x)$, p.d.f. है तथा

(ii) एक संख्या b ज्ञात कीजिए ताकि $p(x<b) = P(x>b)$ हो।

4. (a) मान लीजिए कि $X_1, X_2, .. X_n$, प्रायिकता घनत्व फलन 4

$$f(x\,;\,\theta) = \theta X^{\theta - 1},\ 0<X<1,\ \theta>0$$
$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

वाले एक बंटन में से आभाप n का लिया हुआ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। θ का एक उच्चिष्ठ संभावित आकलक प्राप्त कीजिए।

(b) किसी बंटन के मान 4 के परित प्रथम चार आघूर्ण -1.5, 17, -30 और 108 हैं। माध्य के परित आघूर्ण ज्ञात कीजिए। साथ ही, मूलबिंदु के परित आघूर्ण भी ज्ञात कीजिए। 6

5. (a) X और Y दो यादृच्छिक चर हैं जिनका संयुक्त घनत्व फलन $f(x, y) = \frac{1}{27}(2x + y)$ है, जहाँ x और y केवल पूर्णांक 0, 1 और 2 ही हो सकते हैं। $X = x$ के लिए Y का प्रतिबंधित बंटन ज्ञात कीजिए। 6

(b) किसी निर्दिष्ट स्टेशन पर, प्रात: 7 बजे से प्रारंभ करते हुए, स्थानीय रेलगाड़ियाँ प्रत्येक 15 – मिनटों के अंतरालों पर पहुँचती है। यदि एक यात्री उस स्टेशन पर ऐसे समय पर पहुँचता है, जो प्रात: 7 : 00 बजे और प्रात: 7 : 30 बजे के मध्य एक समानरूप से बंटित है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह यात्री एक रेलगाड़ी के लिए 5 मिनट से कम समय तक प्रतीक्षा करेगा। 4

6. (a) 5000 वस्तुओं के एक बैच में से 200 वस्तुओं का चुना गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श यह दर्शाता है कि इन वस्तुओं का औसत व्यास 0.75 से.मी. है। समष्टि माध्य के लिए, 95% विश्वास्यता सीमा ज्ञात कीजिए। **3**

(b) यदि एक विशेष कंपनी द्वारा निर्मित 2% बिजली के बल्ब खराब हैं, तो इसकी प्राथिकता ज्ञात कीजिए कि 200 बल्बों के एक प्रतिदर्श में : **4**

(i) 2 से कम बल्ब खराब हैं।

(ii) 3 से अधिक बल्ब खराब हैं।

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं : $e^{-4} = 0.0183$, $e^{-2.5} = 0.0821$].

(c) मान लीजिए कि $X_1, X_2, .. X_n$; $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 ज्ञात हैं, में से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। $H_1 : \theta > \theta_0$ के विरुद्ध $H_0 : \theta = \theta_0$ की जाँच करने के लिए, α स्तरीय UMP परीक्षण ज्ञात कीजिए। इस परीक्षण का घात फलन भी ज्ञात कीजिए। **3**

7. बताइए कि नीचे दिए हुए कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए। **5x2=10**

(a) निराकरणीय (शून्य) परिकल्पना को अस्वीकार करना जब वह टाइप II की त्रुटि में है।

(b) स्वतंत्रता की कोटि दो से कम या दो के बराबर वाले काई-स्कवायर चर का प्रायिकता वक्र J के आकार है।

(c) बारंबारता बहुभुज अनुरेखित नहीं किया जा सकता, यदि वर्ग अंतराल समान चौड़ाई के नहीं हैं।

(d) यदि (X, Y) का संयुक्त p.d.f

$$f(x, y) = 8xy, \; 0 < x < y < 1 \text{ है,}$$

तो X और Y स्वतंत्र हैं।

(e) किन्हीं पाँच घटनाओं के लिए, न्यूनतम दो घटनाओं का घटित होना तथा एक से अधिक घटना का घटित न होना पूरक घटनाएँ हैं।