No. of Printed Pages : 8

PHE-14

00439

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2010

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt *any five* parts : 5x2=10

(a) Show that the following matrix is orthogonal.

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) Plot $J_1(x)$ as a function of x.

(c) Locate and name the singularity of the following function in the finite z plane :

$$\frac{\sin z^2}{z}$$

(d) Calculate the Laplace transform of $\cosh at$.

(e) If A^{ij} is an antisymmetric tensor and B_i is a vector, show that $A^{ij}B_iB_j = 0$ (summation convention assumed).

(f) Obtain the Fourier sine transform of the following function :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & x > \pi/2 \end{cases}$$

(g) Determine the residue of the function

$$f(z) = \frac{1}{\left(z^2 + a^2\right)^2} \text{ at } z = i\,a.$$

(h) Determine whether the following matrix is unitary or not :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

2. Attempt *any two* parts : **2x5=10**

(a) Consider the 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtain the eigen values and the eigen vectors of A. Show that the eigen vectors are orthogonal. Diagonalize A.

(b) Prove that the eigen values of a hermitian matrix are real and eigen vectors belonging to distinct eigen values are orthogonal.

(c) State the requirements to be satisfied for a set $G = \{x, y, z, \ldots.\}$ to be a group.

Show that the set of four complex numbers $1, i, -1, -i$ where $i = \sqrt{-1}$, is a group under multiplication.

3. Attempt *any two* parts : **2x5=10**

(a) Evaluate the integral

$$\int_C \frac{e^z\, dz}{z^2 + 1}, C : |z| = 2.$$

(b) Using the method of residues. Show that

$$\oint_C \frac{dz}{z^3\ (z + 3)} = \frac{2\pi i}{27}, \text{ where } C : |z| = 2.$$

(c) Using contour integration prove that

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. Attempt *any two* parts : **2x5=10**

(a) Let $F(s)$ be the Laplace transform of $f(t)$ for $s > a$. Show that $F(s - c)$ is the Laplace transform of $f(t)e^{ct}$ for $s > a + c$.

(b) Determine the Fourier Transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, 0 < x < \pi \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

(c) Calculate the inverse Laplace transform of the function.

$$F(s) = \frac{s}{(s - 1)^2 - 4}$$

5. Attempt *any two* parts : **2x5=10**

(a) Using the generating function

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

prove that the Legendre polynomials satisfy the recurrence relation $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$.

(b) Hermite polynomials $H_n(x)$ are defined in accordance with the generating function

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!}$$

Prove that

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx$$

$$= 2^n n!\, \pi^{1/2} \delta_{nm}.$$

(c) Bessel functions of the first kind of integral order n, $J_n(x)$ are obtained from the generating function,

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

show that,

$$\cos(x \sin\theta) = J_o(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos(2k\theta)$$

and

$$\sin(x \sin\theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin(2k-1)\theta.$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस.सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. ***कोई पाँच*** भाग करें : 5x2=10

(a) सिद्ध करें कि निम्नलिखित आव्यूह लांबिक है :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) x के फलन के रूप में $J_1(x)$ का आलेख खींचे।

(c) निम्नलिखित फलन की विचित्रता का परिमित z समतल में स्थान निर्धारण कीजिए और उसका नाम बताइए :

$$\frac{\sin z^2}{z}$$

(d) $\cos h\, at$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित करें।

(e) यदि A^{ij} एक प्रतिसममित टेन्सर है और B_i एक सदिश है, तो सिद्ध करें कि $A^{ij}B_iB_j = 0$ (यहां संकलन परंपरा प्रयुक्त की गई है।)

(f) निम्नलिखित फलन का साइन फूरिए रूपांतर प्राप्त करें :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & x > \pi/2 \end{cases}$$

(g) $z = i\,a$ पर फलन $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2 + a^2\right)^2}$ का अवशिष्ट प्राप्त करें।

(h) परिकलित करें कि निम्नलिखित आव्यूह ऐकिक आव्यूह है या नहीं।

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

2. ***कोई दो*** भाग करें : **2x5=10**

(a) निम्नलिखित 2×2 आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

के आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात करें। सिद्ध करें कि आइगेन सदिश लांबिक हैं। आव्यूह A का विकर्णन करें।

(b) सिद्ध करें कि हर्मिटी आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं और भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश एक दूसरे के प्रति लांबिक होते हैं।

(c) वे प्रतिबंध लिखें जिनके अधीन कोई समुच्चय $G = \{x, y, z, \ldots\}$ समूह होता है।

सिद्ध करें कि चार सम्मिश्र संख्याओं $1, i, -1, -i$ का समुच्चय गुणन के संयोजन नियम के अधीन एक समूह है।

3. ***कोई दो*** भाग करें : 5x2=10

(a) निम्नलिखित समाकल को परिकलित करें :

$$\int_C \frac{e^z\, dz}{z^2+1}, \; C : |z| = 2.$$

(b) अवशिष्टों की विधि का प्रयोग करते हुए सिद्ध करें कि :

$$\oint_C \frac{dz}{z^3\,(z+3)} = \frac{2\pi i}{27} \text{ जहां } C : |z| = 2.$$

(c) कन्टूर समाकल विधि का प्रयोग करके सिद्ध करें कि :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. ***कोई दो*** भाग करें : 2x5=10

(a) मान लें कि $s > a$ के लिए $f(t)$ का लाप्लास रूपांतर $F(s)$ है तो सिद्ध करें कि $s > a + c$ के लिए $f(t)e^{ct}$ का लाप्लास रूपांतर $F(s - c)$ होता है।

(b) निम्नलिखित फलन का फूरिए रूपांतर परिकलित करें :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, 0 < x < \pi \\ 0, \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(c) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित करें :

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2 - 4}$$

5. *कोई दो* भाग करें : **2x5=10**

(a) जनक फलन

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

का प्रयोग करके सिद्ध करें कि लेजान्ड्रे-बहुपद निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

को संतुष्ट करते हैं।

(b) हर्मिट बहुपद $H_n(x)$ निम्नलिखित जनक संबंध द्वारा परिभाषित होते हैं :

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!}$$

सिद्ध करें कि :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e{-x^2} \; H_n(x) \, H_m(x) \, dx$$

$$= 2^n \, n! \, \pi^{1/2} \, \delta nm.$$

(c) प्रथम प्रकार और n, $J_n(x)$ पूर्णांक कोटि वाले बेसल फलनों को निम्नलिखित जनक फलन द्वारा प्राप्त किया जाता है :

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \, t^n$$

सिद्ध करें कि :

$$\cos(x \sin\theta) = J_o(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos(2k\theta)$$

और

$$\sin(x \sin\theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin(2k-1)\theta.$$