MTE-9

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2010

03579

MATHEMATICS

MTE-9 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : Attempt five questions in all. Q. No. 1 is ***compulsory.*** *Do* ***any four*** *questions out of Q. No. 2 to 7. Calculators are* ***not*** *allowed.*

1. Are the following statements *true or false* ? Give reasons for your answers : **10**

   (a) Every monotonically increasing sequence converges.

   (b) 1.5 is a limit point of the interval $]-2.5, 1.5[$.

   (c) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$ is convergent.

   (d) The function f defined by

   $$f(x) = |x - \frac{7}{2}| \ (x \in R)$$

   has a local maxima.

   (e) Every bounded function is integrable on [a, b].

2. (a) Use the principle of induction, to show that $|\sin n x| \leq n |\sin x| \;\forall\; n \in N$ and $\forall\; x \in R$. 4

(b) If f and g are real valued functions over R such that $\lim_{x \to a} f(x) = l$ and $\lim_{x \to a} g(x) = m$, then prove that 3

$$\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = l - m.$$

(c) Find the derived set of each of the following sets. 3

(i) $]-1, \frac{1}{2}]$ (ii) $\{1 + \frac{1}{n} : n \in N\}$.

3. (a) Show that the sequence $\{f_n\}$ of functions, where 6

$$f_n(x) = \frac{n}{x + n}$$

is uniformly convergent in $[0, k]$, where $k>0$. Show further that $\{f_n\}$ is not uniformly convergent in $[0, \infty[$.

(b) Find the points in $]0, \pi[$ at which the function f given by 4

$$f(x) = \sin x\,(1 - \cos x)$$

attains a local maximum value. Also find the value.

4. (a) Show that 4

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}, \; x > 0.$$

(b) State Bolzano-Weierstrass theorem. Which of the conditions of this theorem is sufficient and which is necessary ? Justify your answer. 3

(c) Test the convergence of the series 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n + 2} x^{n-1} \quad (x > 0)$$

5. (a) Evaluate $\int_0^1 x^2 \, dx$ using the defunction of Riemann integration. 5

(b) Give one example each for the following : 5

(i) Infinite countable set.

(ii) Uncountable set.

(iii) A set which is neither open nor closed

(iv) Compact set

(v) A set which has no limit point

6. (a) Find the value/s of x for which the series 5

$$\Sigma \frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6.......2n} . \frac{x^n}{n}$$

is convergent

(b) Prove that between any two real roots of $\cos x = e^{-3x}$, there is at least one root of $e^{3x} \sin x - 3 = 0$. 3

(c) Find : $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^3}$. 2

7. (a) Find the limit, as $n \to \infty$, of the sum **4**

$$\frac{1}{\sqrt{4n-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{8n-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{12n-3^2}} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

(b) Let f be a function, defined on R by **4**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-4}, & \text{when } x \neq -2 \\ -1, & \text{when } x = -2 \end{cases}$$

check whether f is uniformly continuous on $[-1, 1]$ or not.

(c) Find the point on the curve, $x^2 + 2x + 3$ where the tangent is parallel to the chord joining the points whose abscissae are $x = -2$ and $x = 1$. **2**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

गणित

एम.टी.ई.-9 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

*नोट : कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** हैं। प्रश्न सं 2से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। केलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन ***सत्य*** हैं या ***असत्य***। अपने उत्तरों के कारण बताइए। **10**

   (a) प्रत्येक एकदिष्टतः वर्धमान अनुक्रम अभिसरण करता है।

   (b) 1.5 अंतराल $]-2.5, 1.5[$ का एक सीमा बिन्दु है।

   (c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$ अभिसारी होता है।

   (d) $f(x) = |x - \frac{7}{2}|$ $(x \in R)$ द्वारा परिभाषित फलन f का स्थानिक अधिकतम होता है।

   (e) प्रत्येक परिबद्ध फलन, $[a, b]$ पर समाकलनीय होता है।

2. (a) आगमन सिद्धांत द्वारा दिखाइए कि $|\sin n x| \le n |\sin x|$ $\forall\, n\epsilon N$ and $\forall\, x\epsilon R$. 4

(b) यदि f और g, R पर ऐसे वास्तविक मान फलन है जिनके लिए $\lim_{x\to a} f(x) = l$ and $\lim_{x\to a} g(x) = m$, तब सिद्ध कीजिए कि : 3

$$\lim_{x\to a} \{f(x) - g(x)\} = l - m.$$

(c) निम्नलिखित प्रत्येक समुच्चयों का व्युत्पन्न समुच्चय ज्ञात कीजिए : 3

(i) $]-1, \frac{1}{2}]$ (ii) $\{1 + \frac{1}{n} : n\epsilon N\}$.

3. (a) दिखाइए कि $f_n(x) = \frac{n}{x + n}$ द्वारा परिभाषित फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$, $[0, k]$ में एकसमानतःअभिसारी है, जहाँ $k>0$. यह भी दिखाइए कि $\{f_n\}$, $[0, \infty[$ में एकसमानतः अभिसारी नहीं है। 6

(b) $]0, \pi[$ में वे बिन्दु ज्ञात कीजिए, जिनपर $f(x) = \sin x\,(1 - \cos x)$ द्वारा परिभाषित फलन f स्थानिय अधिकतम मान प्राप्त करता है। वह मान भी ज्ञात कीजिए। 4

4. (a) दिखाइए कि : 4

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!},\ x > 0.$$

(b) बुल्जानों-वायर्स्ट्रास प्रमेय का कथन दीजिए। इस प्रमेय का कौनसा प्रतिबंध पर्याप्त है और कौन-सा अनिवार्य है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(c) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : . 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{2^n + 2} x^{n-1} \quad (x > 0)$$

5. (a) रीमेन समाकलन की परिभाषा से $\int_0^1 x^2 \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए। 5

(b) निम्नलिखित प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिए : 5

(i) अपरिमित गणनीय समुच्चय

(ii) अगणनीय समुच्चय।

(iii) वह समुच्चय जो न कि विवृत्र है और न ही संवृत्त।

(iv) संवृत्त समुच्चय

(v) एक ऐसा समुच्चय जिसका कोई सीमा बिन्दु नहीं होता।

6. (a) x के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए श्रेणी 5

$$\Sigma \, \frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6.......2n} . \, \frac{x^n}{n}$$ अभिसारी है।

(b) सिद्ध कीजिए कि $\cos x = e^{-3x}$ के किन्हीं दो वास्तविक मूलों के बीच $e^{3x} \sin x - 3 = 0$ की कम से कम एक मूल होता है। 3

(c) ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{(x-5)^3}$. 2

7. (a) निम्नलिखित योग की सीमा ज्ञात कीजिए, जबकि n अनंत की ओर प्रवृत्त होता है। 4

$$\frac{1}{\sqrt{4n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{8n-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{12n-3^2}}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

(b) मान लीजिए f, R पर 4

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4}, & \text{जब } x\neq -2\\ -1 & \text{, जब } x=-2\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। जाँच कीजिए कि f $[-1, 1]$ पर एकसमानतः संतत है या नहीं।

(c) वक्र x^2+2x+3 पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर खींची गई स्पर्श रेखा, वक्र के दो बिन्दुओं को, जिनके भुजा $x=-2$ और $x=1$ हैं, मिलाने वाली जीवा के समांतर होती है। 2