No. of Printed Pages : 8

MTE–07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

01479

Term-End Examination

December, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE–07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

*Note : **Question No. 1 is Compulsory.** Attempt **any four** questions from the remaining. **No** Calculators are allowed.*

---

1. State whether the following statements are ***true*** or ***false***. Give reasons for your answers : **2x5=10**

   (a) If $\{x : x \in]-\infty, a[\cap]b, \infty[\} = \phi$, then $a < b$.

   (b) The set $S = \{(x, y, z) : |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$ is an open cube with one corner having coordinates $(-1, -1, -1)$.

   (c) If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$.

   (d) The set $\{(x, y) : x = 2y\}$ is not polygonally connected.

   (e) The function $F(x, y) = (y \sin xy, x \sin xy)$ is not conservative.

2. (a) Show that $\sup \{ x : x \in]-\infty, a[\cap] b, \infty[\} = a$ if $]-\infty, a[\cap] b, \infty[\neq \phi$. 2

(b) State Inverse Function Theorem. Apply this theorem to check the local invertibility of the function $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ given by $F(x, y, z) = (y \sin x, x+y+1, z)$ at the point $(\pi, 1, 1)$ 5

(c) State Green's theorem. Use this theorem to find the area of the ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4$. 3

3. (a) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{3e^x - 3e^{-x} - 6x}{x - \sin x}$. 3

(b) Sketch the region of integration given by the integral $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} dy\, dx$ and compute the area of the region by evaluating the integral. 4

(c) Show that the origin is a point in the domain of the function f given by

$f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \cos z$

and it is continuous at there. 3

4. (a) Show that the open disc S with centre (0, 0) and radius 5 in $\mathbf{R}^2$ lies in the rectangle

$S^1 = \{ (x, y) : |x| < 6, |y| < 7 \}$. 2

(b) Examine the following function $f(x, y)$ for local extrema. 4

$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x + 4y + 9$.

(c) Prove that the function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{5e^x + 7e^z}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ is not differentiable at (0, 0, 0). 4

5. (a) Let $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^7}{x^2 + y^6}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 5

Check whether f_{xy} and f_{yx} are equal or not at (0, 0).

(b) Evaluate $\iiint_B 3x^2 \, dx \, dy \, dz$, where $B = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$. 2

(c) Find $\frac{\partial (x, y)}{\partial (z, w)}$ for the transformations $x = 2u^2 - 3v^2$, $y = u + v$, where $u = e^{z^2} - 3zw$ and $v = 5z - 7w$. 3

6. (a) Evaluate : $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} + e^{-3x} + 7 \right]$. 2

(b) Let $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$. Let $x = 5e_1 - e_2 + 7e_3$, $y = e_1 - 5e_2 - e_3$ and $z = e_1 - e_2 - e_3$. Find $| 3x - 2y - z |$. 3

(c) Find the Taylor polynomials of $f(x, y) = 2 + x^3 + y^3$ at (1, 0). 5

7. (a) Describe and draw a rough sketch of the level curves of the function 2

$f(x, y) = \sqrt{9x^2 - y^2}$.

(b) Find $\frac{\partial w}{\partial t}$ at $(1, 0, \pi)$ for the function 3

$w(x, y, z) = 3xy + 5yz + 8zx$

where $x(r, s, t) = 3r \cos s$,

$y(r, s, t) = \text{sint}$

$z(r, s, t) = 5\,st.$

(c) Find the integral $f(x, y) = y$. Over the region D which is inside the Cardioid $r = 3(1 - \cos\theta)$ and outside the circle $r = 3$. 5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.–07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

*नोट : प्रश्न 1 करना **जरूरी** है। शेष प्रश्नों में से **किन्हीं चार** के उत्तर दीजिए। कैलक्युलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। 2x5=10

   (a) यदि $\{x : x \in]-\infty, a[\cap]b, \infty[\} = \phi$, तब $a < b$.

   (b) समुच्चय $S = \{(x, y, z) : |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$ एक ऐसा विवृत घन है जिसके एक कोने के निर्देशांक $(-1, -1, -1)$ हैं।

   (c) यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$,

   तब $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$.

   (d) समुच्चय $\{(x, y) : x = 2y\}$ बहुभजीयतः संबंधित नहीं है।

   (e) फलन $F(x, y) = (y \sin x\, y, x \sin x\, y)$ संरक्षी नहीं है।

2. (a) दिखाइए कि $\sup\{x : x\epsilon\,]-\infty, a\,[\cap]\,b, \infty\,[\} = a$ तब $]-\infty, a\,[\cap]\,b, \infty[\neq \phi$. 2

(b) प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन दीजिए। बिंदु $(\pi, 1, 1)$ पर $F(x, y, z) = (y \sin x, x+y+1, z)$ द्वारा दिए गए फलन $F : \mathbf{R}^3\ \mathbf{R}^3$ की स्थानिक व्युत्क्रमणीयता की जाँच करने के लिए इस प्रमेय को लागू कीजिए। 5

(c) ग्रीन प्रमेय का कथन दीजिए। इस प्रमेय द्वारा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

3. (a) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^x - 3e^{-x} - 6x}{x - \sin x}.$$

(b) समाकल $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} dy\, dx$ में दिए गए समाकलन प्रदेश का लेखाचित्र बनाइए और समाकल का मूल्यांकन करके प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(c) दिखाइए कि मूल बिन्दु, $f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \cos z$ द्वारा दिए गए फलन f के प्रांत में एक बिन्दु है और वहाँ यह संतत है। 3

4. (a) दिखाइए कि $\mathbf{R}^2$ में केन्द्र $(0, 0)$ और त्रिज्या 5 वाली विवृत चक्रिका S, आयत $S^1 = \{(x, y) : |x| < 6, |y| < 7\}$ में स्थित होती है। 2

(b) स्थानिक चरम मानों के लिए निम्नलिखित फलन $f(x, y)$ की जाँच कीजिए 4
$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x + 4y + 9.$

(c) सिद्ध कीजिए कि $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{5e^x + 7e^z}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ 4

द्वारा परिभाषित फलन $f : R^3 \to R$, (0, 0, 0) पर अवकलनीय नहीं है।

5. (a) मान लीजिए : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^7}{x^2 + y^6}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

जाँच कीजिए कि f_{xy} और f_{yx}, (0, 0) पर समान हैं या नहीं।

(b) $\iiint_B 3x^2 \, dx \, dy \, dz$, का मूल्यांकन कीजिए जहाँ 2

$B = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$

(c) रूपांतर $x = 2u^2 - 3v^2$, $y = u + v$ के लिए 3

$\frac{\partial (x, y)}{\partial (z, w)}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $u = e^{z^2} - 3zw$ और $v = 5z - 7w$.

6. (a) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 2

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} + e^{-3x} + 7 \right].$$

(b) मान लीजिए $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ और $e_3 = (0, 0, 1)$. मान लीजिए $x = 5e_1 - e_2 + 7e_3$, $y = e_1 - 5\ e_2 - e_3$ और $z = e_1 - e_2 - e_3$. तब $3x - 2y - z$ | ज्ञात कीजिए। 3

(c) बिंदु (1, 0) पर $f(x, y) = 2 + x^3 + y^3$ के टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 5

7. (a) फलन $f(x, y) = \sqrt{9x^2 - y^2}$ के स्तर वक्रों का वर्णन कीजिए और एक स्थूल चित्र बनाइए। 2

(b) फलन $w\ (x, y, z) = 3xy + 5yz + 8zx$ के लिए $(1, 0, \pi)$ पर $\frac{\partial w}{\partial t}$ ज्ञात कीजिए जहाँ 3

$x\ (r, s, t) = 3r \cos s,$

$y\ (r, s, t) = sint$

$z\ (r, s, t) = 5\ st.$

(c) प्रदेश D पर समाकल $f(x, y) = y$ ज्ञात कीजिए, जहाँ D छदयाम $r = 3\ (1 - \cos\theta)$ के भीतर और वृत्त $r = 3$ के बाहर स्थित है। 5