04985

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2010

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE - 6 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt Five questions in all. Question no. 7 is **compulsory**. Answer **any four** questions from questions no.**1** to **6**. Calculators are **not** allowed.*

---

1. (a) Let $X = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35},\}$ Form the composition table of X with respect to multiplication modulo 40. Does this show that X is a group ? Give reasons for your answer. **4**

(b) Consider the ring $R = \dfrac{Z_2[x]}{\langle x^8 - 1\rangle}$ **6**

(i) Is R a finite Ring ?

(ii) Does R have zero divisors ?

(iii) Does R have nilpotent elements ?

Justify your answers.

2. (a) Let $S = \{a + i\,b, |\ a \in Z, b \in 3Z\}$. Is S a subring of Z [i] ? Is S an ideal of Z [i] ? Give reasons for your answers. **4**

(b) Let $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| a, b, d \in R, ad \neq 0 \right\}$. 3

If $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| b \in R \right\}$,

Show that H is a normal subgroup of G.

(c) If G is a cyclic group with no proper non-trivial subgroup, then show that G must be finite. What can O(G) be ? 3

3. (a) Show that in the ring $Z\left[\sqrt{5}\right]$ the element $1 + \sqrt{5}$ is irreducible but not prime. 5

(b) Let $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ be the plane in the rectangular coordinate system. 5
Define '$\sim$' by $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ iff $x_1 - x_2$ is an integer'.

(i) Show that $\sim$ is an equivalence relation

(ii) Give a geometric description of the equivalence class to which (0, 0) belongs.

(iii) Is the number of equivalence classes finite ? Justify your answer

4. (a) Let G be a group and let $\phi : G \to G : \phi(x) = x^{-1}$. 4

(i) Prove that ϕ is bijective.

(ii) Prove that ϕ is an automorphism if and only if G is abelion

(b) Show all the distinct ways in which the multiplication operation can be defined on X = {0, 1, 2, 3} to make X a ring ; if addition is defined as addition modulo 4. **6**

5. (a) Which of the following are field extensions of Q ? Give reasons for your answers. **5**

(i) $Q[x]/\langle x^3+8\rangle$,

(ii) $Q[x]/\langle x^3+10\rangle$

For those that are field extensions, obtain their characteristics also.

(b) (i) Let G be a group and let H and K be subgroups of G such that $H \subsetneq G, K \subsetneq G$. Show that $G \neq H \cup K$ **5**

(ii) Give an example, with justification, of a group G and three subgroups H_1, H_2, H_3 such that $H_i \subsetneq G, \forall i$ but

$G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$

6. (a) Apply the principle of induction to show that $(4^{n+1}+5^{2n-1})$ is divisible by $21 \ \forall \ n \in N$. **3**

(b) Prove that the ring $Q[x]/\left(x^2-2\right)$ is isomorphic to the ring **7**

$Q\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a+b\sqrt{2} \mid a, b, \in Q\right\}$.

7. Which of the following statements are **true** ? Give reasons for your answers. **10**

(a) $Z_3 \times Z_3 \simeq Z_9$ as groups

(b) If H is a proper subgroup of { Z, +} such that 18,30 and 40 belong to H, then $H = 2Z$.

(c) The map $\phi : M_2(z) \to z$, defined by

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a,$$ is a ring homomorphism.

(d) If P_1, P_2 are prime ideals in a commutative ring R, then $P_1 \cap P_2$ is also a prime ideal.

(e) On the set of real numbers, the relation R, defined by aRb iff $|a-b| < 1$, is transitive

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.- 6 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. सं. 7 (**सात**) करना **ज़रूरी** है। प्र. सं 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) मान लीजिए $X = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35},\}$ गुणन माड्यूलों 40 के सापेक्ष X की संक्रिया सारणी बनाइए। क्या यह दर्शाती है कि X एक समूह है? अपने अत्तर के कारण दीजिए। **4**

   (b) वलय $R = \dfrac{Z_2[x]}{\langle x^8 - 1\rangle}$ लीजिए। **6**

   (i) क्या R परिमित वलय है?

   (ii) क्या R के शून्यक विभाजक है?

   (iii) क्या R के शून्यंभावी अवयव हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

2. (a) मान लीजिए $S = \{a + i\,b \mid a \in Z, b \in 3Z\}$. क्या S, $Z[i]$ का उपवलय है? क्या S, $Z[i]$ की गुणजावली है? अपने उत्तरों के कारण बताइए। **4**

(b) मान लीजिए : 3

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| a, b, d \in R, ad \neq 0 \right\},$$ यदि

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| b \in R \right\},$$ दिखाइए कि

H, G का प्रसामान्य उपसमूह है।

(c) यदि G एक ऐसा चक्रीय समूह है जिसका कोई उचित अतुच्छ उपसमूह नहीं है, तब दिखाइए कि G परिमित ही होगा। O(G) क्या हो सकता है? 3

3\. (a) दिखाइए कि वलय $Z\left[\sqrt{5}\right]$ में अवयव $1 + \sqrt{5}$ अखंडनीय है लेकिन अभाज्य नहीं है। 5

(b) मान लीजिए $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ निर्देशांक तंत्र में समतल है। $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, यदि और केवल यदि $x_1 - x_2$ एक पूर्णांक है से '~' को परिभाषित कीजिए। 5

(i) दिखाइए कि ~ एक तुल्यता संबंध है।

(ii) उस तुल्यता वर्ग का ज्यामितीय विवरण दीजिए जिसमें (0, 0) है।

(iii) क्या तुल्यता वर्गों की संख्या परिमित है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

4. (a) मान लीजिए G एक समूह है और मान लीजिए : 4

$\phi : G \to G : \phi(x) = x^{-1}$.

(i) सिद्ध कीजिए कि ϕ एकैकी आच्छादक है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि ϕ एक स्वाकारिता है, यदि और केवल यदि G आबेली है।

(b) वे सभी अलग–अलग तरीके दर्शाइए जिनमें X को वलय बनाने के लिए गुणन संक्रिया को $X = \{0, 1, 2, 3\}$ पर परिभाषित किया जा सकता है, यदि जमा को जमा माड्यूलों 4 के रूप में परिभाषित किया जाता है। 6

5. (a) निम्नलिखित में से कौन–से Q के क्षेत्र–विस्तार हैं? अपने उत्तरों के कारण दीजिए। 5

(i) $Q[x]/\langle x^3 + 8\rangle$,

(ii) $Q[x]/\langle x^3 + 10\rangle$

जो क्षेत्र–विस्तार हैं, उनके अभिलक्षणिक भी प्राप्त कीजिए।

(b) (i) मान लीजिए G एक समूह है और H और K, G के ऐसे उपसमूह हैं, जहाँ $H \subsetneq G, K \subsetneq G$. 5

दिखाइए कि $G \neq H \cup K$.

(ii) ऐसे समूह G और तीन उपसमूहों H_1, H_2, H_3 का पुष्टि सहित उदाहरण दीजिए, जहाँ $H_i \subsetneq G, \forall i$ लेकिन $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$

6. (a) आगमन नियम द्वारा दिखाइए कि 21 $\forall$ $n \in N$, $(4^{n+1} + 5^{2n-1})$ से विभाजित है। 3

(b) सिद्ध कीजिए कि वलय $Q[x]/\left(x^2-2\right)$, वलय $Q\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a+b\sqrt{2} \mid a, b, \in Q\right\}$ के तुल्याकारी है। 7

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन **सत्य** हैं? अपने उत्तरों के कारण बताइए। 10

(a) समूहों के रूप में $Z_3 \times Z_3 \simeq Z_9$.

(b) यदि H, $\{Z, +\}$ का ऐसा उचित उपसमूह है जहाँ 18, 30 और 40, H में हैं, तब $H = 2Z$.

(c) $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$ द्वारा परिभाषित फलन $\phi : M_2(z) \to z$ एक वलय समाकारिता है।

(d) यदि P_1, P_2 क्रमविनिमेय वलय R में अभाज्य गुणजावलियाँ हैं, तब $P_1 \cap P_2$ भी एक अभाज्य गुणजावली है।

(e) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर a R b यदि और केवल यदि $|a-b| < 1$ द्वारा परिभाषित संबंध R संक्रामक हैं।