

00144

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**

**Term-End Examination**

**December, 2010**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*Note : Attempt any five questions. All questions carry equal marks. Use of calculator is not allowed.*

- 
- 
1. (a) Consider a watermass within which 3  
    plytoplankton grows and diffusion takes  
    place. Find the size of the watermass below  
    which no increase of plytoplankton  
    population is possible by using dimensional  
    analysis.
- (b) An arrow is shot vertically upwards from 7  
    the ground with an initial velocity of  
    50 m/sec. It experiences both the  
    deceleration of gravity and deceleration  
     $\vartheta^2/250$  m/sec<sup>2</sup> due to air resistance where  
     $\vartheta$  is the arrow velocity at any time  $t$ . Find :  
    (i) How high the arrow will go in the  
        air ?

- (ii) How much time it will take the arrow to reach the highest point ?
- (iii) With what velocity will the arrow come back to ground ?

2. (a) The heat emission rate associated with a stack gas is 5000 kJ/s, the wind and stack gas speeds are 5 and 20 m/s respectively, and the inside stack diameter at the top is 2 m. Estimate the plum rise by means of the Holland Formula. 3
- (b) Write two limitations for Prey-Predator model. 2
- (c) Derive the equation of motion of the linear model for a simple pendulum. Find its solution under boundary conditions at  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  and  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ , where  $\theta$  is the angular distance. 5

3. (a) Let the returns on the securities of two companies X and Y be as given below : 5

Event (j)	Chance ( $p_{1j} = p_{2j}$ )	Return	
		$R_{1j}$	$R_{2j}$
1	1/4	6	7
2	1/2	13	8
3	1/4	18	11

Find the expected return of the port folios  $P = (0.7, 0.3)$  and  $Q = (0.4, 0.6)$ . What inference can you draw by comparing the returns of the portfolio  $P$  and  $Q$  ?

- (b) Consider a rabbit population  $x(t)$  at any time  $t (>0)$ . If  $ax$  is the rate at which birth occurs and  $bx^2$  is the rate at which death occurs ( $a, b$  are constants), then formulate the model of the rabbit population. If the initial population is 120 rabbits and there are 8 births per month and 6 deaths per month occurring at  $t=0$ , how many months does it take for  $x(t)$  to reach 95% of the limiting population ( $b/a$ ) ?

4. (a) Suppose that the population  $x(t)$  and  $y(t)$ . Satisfy the model given by the following system of equations.

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy.$$

Determine all the critical points of the system and discuss the type and stability of these critical points. Which critical point represents the possibility of co-existence of the two populations ?

- (b) Find out the escape velocity and the acceleration due to gravity on the moon where, mass of moon is  $7.35 \times 10^{22}$  kg, Radius of moon is  $1.738 \times 10^6$  m, and universal gravitational constant  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}$ . 3
5. (a) In a market for a commodity, the supply function  $S(p)$  is  $6p^2/(1+2p^2)$  units and the demand function  $D(p)$  is  $(3-p)$  units, where  $p$  is the price in rupees per unit. Find the equilibrium price in an ideal competitive market and show that the equilibrium is stable according to walrasian stability criterion. 3
- (b) Write the wave equation with wave velocity  $C$  and diffusion equation with diffusion coefficient  $K$ . Find the dimensions of  $K$  and  $C$  using these equations. 3
- (c) A drug is induced in a patient's bloodstream at a constant rate  $r$  grams/sec. Simultaneously the drug is removed at a rate proportional to the amount  $x(t)$  of the drug present at any time  $t$ . Determine the differential equation governing the amount  $x(t)$ . If the initial concentration of the drug in the bloodstream is  $x_0$ , find the concentration of the drug at any time  $t$ . 4

6. (a) Two players A and B have three different strategies in a particular game. The pay-off table is given as : 5

		B		
		2	3	5
A	2	2	1	6
	1	1	2	0

Determine the optimum strategy for each player by successively deleting dominated strategies.

- (b) Give one example each from the real world for the following, along with justification for your example : 3
- (i) A non-linear model
  - (ii) A stochastic model
  - (iii) A linear, deterministic model.
- (c) Every party plans strategies to put up candidates who can win elections. List four essentials in framing such a strategy. 2
7. (a) The model for the number of infective  $y$  of a population affected by the spread of a non-fatal disease results in a differential equation. 5

$$\frac{dy}{dt} = y (N\beta - \gamma - \beta y), y(0) = y_0$$

where  $N$  is the total population,  $y_0$  the initial infected population,  $\gamma$  the recovery rate and  $\beta$  the contact rate are all constants. Solve for  $y$  and show that the epidemic converges exponentially to the stable state.

- (b) Suppose the quarterly sales for a car in a city were 2682, 2462 and 3012 respectively. Use exponential smoothing based upon the first three observations to forecast for the fifth period using  $\alpha = \beta = 0.2$ . [ $\alpha$ ,  $\beta$  are smoothing constants. From the past data prior to the three data points, a straight line was fit. The value on the straight line corresponding to the last observed time is 2988 and the slope is 80.]

5

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

**नोट :** किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।  
कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) एक जलद्रव्यमान लीजिए जिसमें फाइटोप्लैक्टन पैदा होते हैं और उनका विसरण भी होता है। विमीय विश्लेषण द्वारा जलद्रव्यमान का वह आमाप ज्ञात कीजिए जिससे कम आमाप में फाइटोप्लैक्टन जनसंख्या में वृद्धि संभव न हो। 3
- (b) एक तीर को प्रारंभिक वेग  $50 \text{ m/sec}$  से ऊर्ध्वारतः ऊपर की ओर छोड़ा गया। तीर, गुरुत्व अवत्वरण और वायु प्रतिरोध के कारण  $\vartheta^2 = 250 \text{ m/sec}^2$  अवत्वरण, जहाँ  $\vartheta$  किसी भी समय  $t$  पर तीर का वेग है, दोनों का अनुभव करता है। 7

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- (i) तीर हवा में कितनी ऊँचाई तक जाएगा ?
- (ii) तीर को सबसे ऊँचे बिंदु तक पहुँचने में कितना समय लगेगा ?
- (iii) कितने वेग के साथ तीर जमीन पर नीचे आएगा ?

2. (a) स्टैंक गैस से संबंधित ऊष्मा उत्सर्जन दर  $5000 \text{ kJ/s}$  है, पवन चाल और स्टैंक गैस चाल क्रमशः  $5$  और  $20 \text{ m/s}$  है और सिरे पर स्टैंक गैस का अंतः व्यास  $2 \text{ m}$  है। हालैण्ड सूत्र की सहायता से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए। 3

(b) परभक्षी-शिकार निदर्श की दो परिसीमाएँ लिखिए। 2

(c) सरल लोलक के रैखिक निदर्श का गति समीकरण व्युत्पन्न 5

कीजिए। आदि प्रतिबंध  $t=0$  पर  $\theta=0$  और  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

है। समीकरण का हल प्राप्त कीजिए जहाँ  $\theta$  लोलक की कोणीय दूरी है।

3. (a) दो कंपनियों X और Y की प्रतिभूतियों के प्रतिफल नीचे दिए गए हैं : 5

घटना (j)	प्रायिकता ( $p_{1j} = p_{2j}$ )	प्रतिफल	
		$R_{1j}$	$R_{2j}$
1	$1/4$	6	7
2	$1/2$	13	8
3	$1/4$	18	11



निवेश सूची  $P = (0.7, 0.3)$  और  $Q = (0.4, 0.6)$  के प्रत्याशित ज्ञात कीजिए। निवेश सूची  $P$  और  $Q$  के प्रतिफलों की तुलना करने पर आप क्या अनुमिति निकाल सकते हैं?

- (b) किसी भी समय  $t (>0)$  पर खरगोश जनसंख्या  $x(t)$  लीजिए। यदि  $ax$  जन्म दर हो और  $bx^2$  मृत्यु दर हो, जहाँ  $a$  और  $b$  अचर हैं, तो खरगोश जनसंख्या का निदर्शन कीजिए। यदि आरंभिक जनसंख्या 120 खरगोश है और समय  $t=0$  पर प्रतिमाह 8 जन्म और 6 मृत्यु होती हों तो  $x(t)$  को सीमांत जनसंख्या  $(b/a)$  के 95% तक पहुँचने में कितने माह लगेंगे?

4. (a) मान लीजिए जनसंख्या  $x(t)$  और  $y(t)$  निम्नलिखित समीकरण निकाय द्वारा प्राप्त निदर्श को संतुष्ट करती हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy.$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए और उनके प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए। कौनसा क्रांतिक बिन्दु दोनों जनसंख्याओं के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है?

- (b) चंद्रमा पर पलायन वेग और गुरुत्व त्वरण ज्ञात कीजिए 3  
जहाँ, चंद्रमा का द्रव्यमान =  $7.35 \times 10^{22}$  kg, चंद्रमा  
की त्रिज्या =  $1.738 \times 10^6$  m, और सार्वत्रिक गुरुत्वीय  
स्थिरांक,  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}$  है।
5. (a) एक जिंस के बाजार में पूर्ति फलन  $S(p)$ ,  $6p^2/(1+2p^2)$  3  
इकाई है और मांग फलन  $D(p)$ ,  $(3-p)$  इकाई है, जहाँ  
 $p$  रूपयों में प्रति इकाई की कीमत है। एक आदर्श  
प्रतियोगी बाजार में संतुलन कीमत ज्ञात कीजिए और  
दिखाइए कि वाल्सेसीय स्थायित्व निकष के अनुसार संतुलन  
स्थायी है।
- (b) तरंग वेग  $C$  वाला तरंग समीकरण और विसरण गुणांक 3  
 $K$  वाला विसरण समीकरण लिखिए। इन समीकरणों  
द्वारा  $K$  और  $C$  की विमाएँ ज्ञात कीजिए।
- (c) कोई दवाई एक रोगी की रक्त धारा में  $r$  ग्राम/सेकण्ड 4  
की अचर दर से प्रेरित की जा रही है। इसके साथ ही,  
यह दवाई किसी भी समय  $t$  पर उपस्थित दवाई की मात्रा  
 $x(t)$  के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा  
 $x(t)$  नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित  
कीजिए। यदि रक्त धारा में दवाई की प्रारंभिक सांद्रता  
 $x_0$  है, तो इस दवाई की किसी भी समय  $t$  पर सांद्रता  
ज्ञात कीजिए।

6. (a) एक खेल में दो खिलाड़ियों A और B के पास तीन अलग-अलग युक्तियाँ हैं। भुगतान सारणी नीचे दी गई है : 5

$$A \begin{matrix} & \text{B} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

प्रभावित युक्तियों का निराकरण करके दोनो खिलाड़ियों के लिए अनुकूलतम युक्ति ज्ञात कीजिए।

- (b) निम्नलिखित के लिए वास्तविक जीवन से संबंधित एक-एक उदाहरण तर्कसंगत दीजिए : 3
- (i) अरैखिक निदर्श
- (ii) प्रसंभाव्य निदर्श
- (iii) रैखिक, निर्धारणात्मक निदर्श
- (c) प्रत्येक पार्टी, उम्मीदवार खड़ा करने के लिए, जो चुनाव जीत सके कुछ योजनाएँ बनाती है। ऐसी योजना बनाने के लिए चार अनिवार्य तथ्य बताइए। 2

7. (a) अघातक बीमारी के फैलने से प्रभावित होनेवाली समष्टि में  $y$  संक्रामक व्यक्तियों का निदर्श अवकल समीकरण 5

$$\frac{dy}{dt} = y (N\beta - \gamma - \beta y), y(0) = y_0$$

से प्राप्त होता है, जहाँ  $N$  कुल समष्टि,  $y_0$  प्रारंभिक संक्रमित समष्टि,  $\gamma$  ठीक होने की दर और  $\beta$  संपर्क दर सभी अचर हैं।  $y$  के लिए हल प्राप्त कीजिए और दिखाइए कि स्थायित्व अवस्था के प्रति महामारी चरघातांकी रूप से अभिसरित होती है।

- (b) मान लीजिए एक शहर में एक कार की तिमाही बिक्रियाँ 5 क्रमशः 2682, 2462 और 3012 थीं। प्रथम तीन प्रेक्षकों पर आधारित चरघातांकी मसूणीकरण से पाँचवीं अवधि की बिक्री का पूर्वानुमान लगाइए जबकि  $\alpha = \beta = 0.2$  [ $\alpha, \beta$  मसूणीकरण अचर हैं। पिछले आंकड़ों (तीन आंकड़ा बिंदुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई है। अंतिम प्रेक्षित समय की संगत रेखा पर मान 2988 और प्रवणता 80 है।]