# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

## Term-End Examination

## December, 2010

01479

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

## MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

*Time : 2 hours* *Maximum Marks : 50*

*Note : Question No. 1 is **compulsory**. Do any four questions from question numbers 2 to 7. Calculators are **not** allowed.*

1. Which of the following statements are ***false*** and which are ***true***? Justify your answer with a short proof or a counter example. 10

   (a) The statement "$x^2-1=0$ has a real root" is not a proposition.

   (b) The Stirling number $S_n^{n-1}=C(n, 2)$.

   (c) No bipartite graph with more then 5 vertices is planer.

   (d) The generating function of the recurrence relation

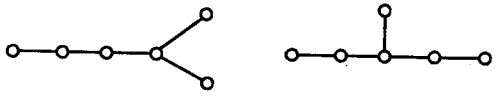
   $a_{n+2} - 3\,a_{n+1} + 2a_n = 0$ is $\frac{e^x}{(x-1)\,(x-2)}$.

   (e) A Hamiltonian graph cannot have a cut vertex.

2. (a) Reduce the Boolean expression $y \wedge (x \vee (y \wedge z))'$ into CNF without making a table. 3

(b) Find the number of ways that four Indians, three Americans, three Pakistanis and two French can be seated in a row so that all persons of the same country are together. 3

(c) Determine whether the following graphs are isomorphic. Justify your answer. 4



3. (a) Using Pascal's triangle, find binomial coefficients for n=8. 2

(b) Find the sum of the series 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n!} = \frac{2^2}{0!} + \frac{3^2}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(n+2)^2}{n!} + \ldots$$

using exponential generating functions.

(c) Construct a graph whose vertices have degrees 4

6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1.

4. (a) Prove that there is no rational number whose square is 30. 3

(b) If a five digit number is chosen at random what is the probability that the product of the digits is 45 ? 4

(c) An English word is called a palindrome if it reads the same whether read from left to right or from right to left, ROTOR for example. Let $a_n$ be the number of English words of length $n_1$ not necessarily meaningful which are palindromes. Set up a recurrence for $a_n$ giving the initial conditions. 3

5. (a) Draw the logical circuit for the boolean expression $[\ (x \vee y') \wedge z\ ] \vee (y \wedge 2)$. 3

(b) Suppose that the sequence $\{a_n\}_{n \geq 0}$ has the generating function A (z). Prove that the generating function B (z) for the sequence $\{b_n\}_{n \geq 0}$ where $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$ and $b_0 = a_0$ is given by $B(z) = (1-z)\ A\ (z)$. 3

(c) Prove that every planar graph is 6 - colourable. 4

6. (a) Explain the terms : 3

Disjunctive syllogism and hypothetical syllogism. Illustrate them by examples.

(b) Write all self conjugate partitions of 13 and draw their Ferrar graphs. 3

(c) Find the complete solution of the recurrence relation 4

$a_n = 2a_{n-1} - 3n$, $n \geq 1$ with $a_1 = 11$.

7. (a) Show that chromatic number of Petersen graph is 3. Give also a 4 edge colouring of the Petersen graph. 3

(b) Test the validity of the argument: If 11 is less than 8, then 11 is not a prime number. 11 is not less than 8. Therefore 11 is a prime number. 3

(c) Let m be a positive integer whose distinct prime factors are $p_1, p_2 \ldots\ldots, p_n$. Prove that the number of integers between 1 and m which are relatively prime to m equals 4

$$m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

# स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## सत्रांत परीक्षा

## दिसम्बर, 2010

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

## एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

*समय :* 2 घण्टे *अधिकतम अंक :* 50

*नोट : प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं हैं।*

1. बताइए निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं। लघु-उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 10

   (a) कथन '$x^2-1=0$ का एक वास्तविक मूल है' एक कथन नहीं है।

   (b) स्टर्लिंग संख्या $S_n^{n-1}=C(n, 2)$

   (c) 5 से अधिक शीर्ष वाला कोई भी द्विभाजित ग्राफ समतलीय होता है।

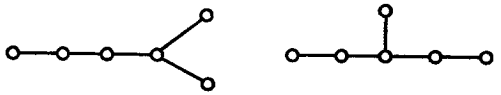
(d) पुनरावृत्ति संबंध $a_{n+2} - 3\,a_{n+1} + 2\,a_n = 0$ का जनक फलन $\frac{e^x}{(x-1)\,(x-2)}$ है।

(e) एक हैमिल्टोनीय ग्राफ में काट शीर्ष नहीं हो सकते।

2. (a) बूलीन व्यंजक $y \wedge (x \vee (y \wedge z))'$ को सारणी बनाए बिना सी.एन.एफ. (CNF) में समानीत कीजिए। 3

(b) कितने तरीकों से चार भारतीयों, तीन अमरीकियों, तीन पाकिस्तानियों और दो फ्रांसीसियों को एक पंक्ति में इस प्रकार बिठाया जा सकता है ताकि एक ही देश के सभी व्यक्ति एक-साथ बैठें। 3

(c) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ तुल्याकारी हैं या नहीं। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4



3. (a) पास्कल-त्रिभुज द्वारा n=8 के लिए द्विपद गुणांक ज्ञात कीजिए। 2

(b) चरघातांकी जनक फलनों द्वारा श्रेणी 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n!} = \frac{2^2}{0!} + \frac{3^2}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(n+2)^2}{n!} + \ldots$$

का योग ज्ञात कीजिए।

(c) एक ऐसा ग्राफ बनाइए जिसके शीर्षों की कोटियाँ 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1 है। 4

4. (a) सिद्ध कीजिए कि कोई भी ऐसी परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 30 होता है। 3

(b) यदि एक पाँच अंक की संख्या को यादृच्छया चुना जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि अंक का गुणनफल 45 होगा? 4

(c) अंग्रेज़ी का शब्द जो बाएँ से दाएँ या दाएँ से बाएँ पढ़े जाने पर समान होता है, वह विलोम पद (Palindrome) कहलाता है। उदाहरण के लिए ROTOR एक विलोम पद है। मान लीजिए $a_n$ लंबाई $n_1$ वाले अंग्रेज़ी शब्दों की संख्या है, जिसका अर्थ न हो लेकिन वे विलोम पद है। प्रारंभिक प्रतिबंधों के साथ पुनरावृत्ति संबंध स्थापित कीजिए। 3

5. (a) बूलीयन व्यंजक $[\ (x \vee y') \wedge z\ ] \vee (y \wedge 2)$ के लिए तर्क परिपथ बनाइए। 3

(b) मान लीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}_{n \geq 0}$ का जनक फलन A (z) है। सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{b_n\}_{n \geq 0}$ के लिए जहाँ $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$ और $b_0 = a_0$, का जनक फलन B (z) होता है $B(z) = (1 - z)\ A\ (z)$. 3

(c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समतलीय ग्राफ 6 - रंजनीय है। 4

6. (a) वियोजित तर्क और परिकल्पनात्मक तर्क को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट कीजिए। 3

(b) 13 के सभी स्व-संयुग्मी विभाजन लिखिए और उनका फैरर ग्राफ बनाइए। 3

(c) पुनरावृत्ति संबंध $a_n = 2\,a_{n-1} - 3n,\ n \geq 1,\ a_1 = 11,$ का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए। 4

7. (a) दिखाइए कि पिटर्सन ग्राफ की वर्णिक संख्या 3 है। पिटर्सन ग्राफ का 4 कोर रंजन भी दीजिए। 3

(b) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं यदि 11, 8 से कम है, तब 11 अभाज्य संख्या नहीं है।

11, 8 से कम नहीं है। इसलिए 11 एक अभाज्य संख्या है। 4

(c) मान लीजिए m एक धन पूर्णांक है जिसके अलग-अलग अभाज्य गुणनखंड $p_1, p_2 \ldots\ldots, p_n$ हैं। सिद्ध कीजिए कि 1 और m के बीच के पूर्णांकों, जो सापेक्षता: m से अभाज्य हैं, की संख्या निम्नलिखित के बराबर होती है।

$$m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$