

03114

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**  
**Term-End Examination**  
**December, 2010**  
**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS**  
**MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS**

*Time : 2 hours**Maximum Marks : 50*

*Note : Question No. 7 is Compulsory. Answer any four questions from question nos. 1 to 6. Calculators are not allowed.*

1. (a) The first three moments about the origin are 2

$$\text{given by } m_1^1 = \frac{n+1}{2}, m_2^1 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{and } m_3^1 = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

Examine the skewness of the data for large n.

- (b) The first of two samples of a group has 4  
 100 items with mean 15 and standard deviation 3. If the whole group has 250 items with mean 15.6 and standard deviation  $\sqrt{13.44}$ . Find the standard deviation of the second group.

- (c) Let  $p$  be the probability that a coin will fall head in a single toss in order to test 4  
 $H_0 : p = \frac{1}{2}$  against  $p = \frac{3}{4}$ . The coin is tossed 4 times and  $H_0$  is rejected if more than 2 heads are obtained. Find the probability of type I error and power of the test.
2. (a) The two regression lines  $Y$  on  $X$  and  $X$  on  $Y$  respectively are as follows :  $3x + 2y = 19$ ,  $3y + 9x = 46$ , find : 6
- (i) the value of correlation coefficient
  - (ii) mean values of  $X$  and  $Y$ .
  - (iii) ratio of variance of  $X$  to that of variance of  $Y$ .
- (b) Suppose that there is a chance for newly constructed building to collapse, whether the design is faulty or not. The chance that the design is faulty is 10%. The chance that the building collapse is 95% if the design is faulty and otherwise it is 45%. It is seen that the building has collapsed. What is the probability that it is due to faulty design ? 4
3. (a) The joint p.d.f. of  $X$  and  $Y$  is given by 5  
 $f(x, y) = C(x + y)$  ;  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  
 $0 \leq x + y \leq 1$ .  
 Find :
- (i) The constant  $C$
  - (ii) The marginal density function of  $X$ .
  - (iii)  $P(X + Y < \frac{1}{2})$
  - (iv)  $E(Y | X = x)$

- (b) The yield in kg of 120 plots in the form of grouped frequency distribution is given below : 5

Yield (kgs)	frequency	Yield (kgs)	frequency
20-30	2	70-80	22
30-40	5	80-90	16
40-50	13	90-100	9
50-60	21	100-110	4
60-70	27	110-120	1

- (i) Estimate the no. of plots with an yield of :
- (A) 60 to 80 kg.  
 (B) more than 100 kg.
- (ii) What is the proportion of plots with yield :
- (A) between 70 and 100 kg  
 (B) less than 75 kg  
 (C) find the median of the distribution.
4. (a) An Urn contains  $M$  balls numbered 1 to  $M$ , 4  
 where the first  $k$  balls are defective and remaining  $(M-k)$  are non-defective. A sample of  $n$  balls ( $n \leq k$ ) is drawn from the urn. Let  $A_k$  be the event that the sample of  $n$  balls contains exactly  $k$  balls defective. Find  $P(A_x)$ ,  $x=0, 1, \dots, k$  when the sample is drawn (i) with replacement (ii) without replacement. Also find  $E(A_x)$ .

- (b) If  $X$  has p.d.f.  $f(x) = e^{-x}; x > 0$ . Use Chebychev's inequality to obtain a lower bound to  $P(-1 \leq X \leq 3)$  and compare it with actual probability. 6

5. (a) A bird watcher sitting in a park has spotted a number of birds belonging to 6 categories. The exact classification is given below : 5

Category	1	2	3	4	5	6
Frequency	6	7	13	17	6	5

Test at 5% level of significance whether the data is compatible with the assumption that this particular park is visited by birds belonging to these six categories in the proportion 1 : 1 : 2 : 3 : 1 : 1.

[ You may like to use the following values :

$$\chi_{5,0.05}^2 = 11.07, \chi_{6,0.05}^2 = 12.59, \chi_{7,0.05}^2 = 14.01 ]$$

- (b) It is known that 40% of the students in a college are girls and 50% of the students are above the median height. If  $\frac{2}{3}$ rd of the boys are above the median height, what is the probability that a randomly selected student who is below the median height is a girl ? 5

6. (a) If  $X$  and  $Y$  are independent Poisson variates such that : 4

$$P(X=1) = P(X=2) \text{ and}$$

$$P(Y=2) = P(Y=3),$$

find the variance of  $X - 2Y$ .

- (b) Let  $X_1, X_2$  be two observations from a distribution with the probability density function : 3

$$f(X; \theta) = \theta X^{\theta-1}, 0 < X < 1, \theta > 0 \\ = 0, \text{ otherwise}$$

To test  $H_0 : \theta = 1$  against  $H_1 : \theta = 2$ , find the critical region and its size.

- (c) Let  $X_1, X_2, \dots, X_n$  be a random sample from a distribution with density function 3

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; \theta > 0 \text{ if } x > 0 \\ = 0, \text{ otherwise}$$

Find maximum likelihood estimator of  $\theta^2$ .

7. State the following statements for true or false by giving reasons in support of your answer : 10

- (a) X and Y are independent if and only if  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .
- (b) If  $H_0 : p = 0.6$  where  $X \sim B(10, p)$ , and  $H_1 : \sigma^2 \geq 1$  where  $X \sim N(0, 1)$ , then  $H_0$  and  $H_1$  are simple hypotheses.
- (c) The correlation coefficient between X and Y is 0.73, then the correlation coefficient between  $-X$  and Y is  $-0.73$ .
- (d) If  $X \sim N(0, 1)$  then  $-X \sim N(0, 1)$ .
- (e) If a distribution is symmetrical about any point 'a' then mean = a = median and all central moments are zero.



स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : प्रश्न 7 अनिवार्य है। प्रश्न 1 से 6 में से कोई चार प्रश्न कीजिए।  
कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. (a) मूलबिंदु के प्रति प्रथम तीन आघूर्ण निम्नलिखित से दिए जाते हैं : 2

$$m_1 = \frac{n+1}{2}, \quad m_2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{और}$$

$$m_3 = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

बड़े  $n$  के लिए, आँकड़ों का वैषम्य निकालिए।

- (b) एक समूह के दो प्रतिदर्शों में से पहले प्रतिदर्श में 100 वस्तुएँ हैं जिनका माध्य 15 और मानक विचलन 3 है। यदि संपूर्ण समूह में, माध्य 15.6 और मानक विचलन  $\sqrt{13.44}$  के साथ 250 वस्तुएँ हैं, तो दूसरे प्रतिदर्श का मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 4

(c)  $H_0 : p = \frac{1}{2}$  प्रतिकूल  $p = \frac{3}{4}$  का परीक्षण करने के 4

लिए, मान लीजिए कि एक सिक्के को एक बार उछाले जाने पर उस पर चित आने की प्रायिकता  $p$  है। सिक्के को चार बार उछाला जाता है तथा  $H_0$  को अस्वीकार कर दिया जाता है, यदि 2 से अधिक 'चित' प्राप्त होते हैं। इस परीक्षण की प्रकार I की त्रुटि की प्रायिकता और क्षमता ज्ञात कीजिए।

2. (a) दो समाश्रयण रेखाएँ  $X$  पर  $Y$  और  $Y$  पर  $X$  क्रमशः 6  
 $3x + 2y = 19$  और  $3y + 9x = 46$  हैं।

(i) सहसंबंध गुणांक का मान प्राप्त कीजिए।

(ii)  $X$  और  $Y$  के माध्य मान ज्ञात कीजिए।

(iii)  $X$  के प्रसरण का  $Y$  के प्रसरण से अनुपात ज्ञात कीजिए।

(b) मान लीजिए कि किसी नव-निर्मित भवन के गिरने का 4  
संयोग है, चाहे उसके डिजाइन में गलती है या नहीं। डिजाइन के गलत होने का संयोग 10% है। यदि डिजाइन गलत है, तो भवन के गिरने का संयोग 95% है, अन्यथा यह 45% है। यह देखा जाता है कि भवन गिर गया है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह गलत डिजाइन के कारण हुआ है?



3. (a) X और Y का संयुक्त p.d.f. निम्नलिखित से दिया जाता है: 5

$$f(x, y) = C(x+y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x+y \leq 1$$

- (i) अचर C ज्ञात कीजिए।
- (ii) X का उपांत घनत्व फलन ज्ञात कीजिए।
- (iii)  $P(X+Y < \frac{1}{2})$  ज्ञात कीजिए।
- (iv)  $E(Y|X=x)$  ज्ञात कीजिए।
- (b) 120 भूमिखंडों का उत्पादन (kg में) एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन के रूप में नीचे दिया गया है : 5

उत्पादन (kg में)	बारंबारता	उत्पादन (kg में)	बारंबारता
20-30	2	70-80	22
30-40	5	80-90	16
40-50	13	90-100	9
50-60	21	100-110	4
60-70	27	110-120	1

- (i) निम्नलिखित उत्पादन वाले भूखंडों की संख्या का आकलन कीजिए।
- (A) 60 से 80 kg
- (B) 100 kg से अधिक
- (ii) (A) 70 और 100 kg के बीच के और
- (B) 75 kg से कम उत्पादन वाले भूखंडों की संख्याओं का क्या अनुपात है?
- (iii) इस बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

4. (a) किसी बर्तन में,  $M$  गेंदें हैं। जिन पर 1 से  $M$  तक संख्याएँ लिखी हुई हैं। इनमें प्रथम  $k$  गेंदें खराब हैं तथा शेष  $(M-k)$  गेंदें खराब नहीं हैं। इस बर्तन में से  $n$  गेंदों ( $n \leq k$ ) का एक प्रतिदर्श निकाला जाता है। मान लीजिए कि  $A_k$  एक घटना इस प्रकार है कि  $n$  गेंदों के इस प्रतिदर्श में ठीक  $k$  गेंदें खराब हैं।  $P(A_x)$ ,  $x=0, 1, \dots, k$  ज्ञात कीजिए जबकि प्रतिदर्श (i) प्रतिस्थापन के साथ निकाला जाता है। (ii) बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाता है। साथ ही,  $E(A_k)$  भी ज्ञात कीजिए।

- (b) यदि  $X$  का p.d.f.,  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$  है, तो  $P(-1 \leq X \leq 3)$  का निम्न परिबंध प्राप्त करने के लिए शेबीशेव असमिका का प्रयोग कीजिए तथा इसकी तुलना वास्तविक प्रायिकता से कीजिए।

5. (a) एक पार्क में बैठे हुए चिड़ियों को देखने वाले किसी व्यक्ति ने 6 श्रेणियों की चिड़ियों की संख्याएँ नोट की, जिसका वर्गीकरण नीचे दिया गया है :

श्रेणी :	1	2	3	4	5	6
बारबारता :	6	7	13	17	6	5

5% सार्थकता के स्तर पर जाँच कीजिए कि ये आँकड़े इस कल्पना के सुसंगत हैं कि इस विशेष पार्क में इन 6 श्रेणियों की चिड़ियाँ 1 : 1 : 2 : 3 : 1 : 1 के अनुपात में आती हैं।

[ आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\chi_{5,0.05}^2 = 11.07, \chi_{6,0.05}^2 = 12.59, \chi_{7,0.05}^2 = 14.01 ]$$

- (b) यह ज्ञात है कि किसी कालेज में 40% विद्यार्थी लड़कियाँ हैं तथा विद्यार्थियों में से 50% विद्यार्थी माध्यिका ऊँचाई से ऊपर हैं। यदि लड़कों के  $\frac{2}{3}$  माध्यिका ऊँचाई से ऊपर हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यादृच्छिक रूप से चुना गया विद्यार्थी, जिसकी ऊँचाई माध्यिका ऊँचाई से कम है, एक लड़की होगी? 5
6. (a) यदि X और Y स्वतंत्र प्वांसा विचर इस प्रकार हैं कि : 4  
 $P(X=1) = P(X=2)$  और  
 $P(Y=2) = P(Y=3)$ , है, तो  
 $X-2Y$  का प्रसरण ज्ञात कीजिए।
- (b) मान लीजिए कि  $X_1, X_2$  एक बंटन के दो प्रेक्षण हैं, 3  
जिनका प्रायिकता घनत्व फलन है :  
 $f(X; \theta) = \theta X^{\theta-1}; 0 < X < 1, \theta > 0$   
 $= 0$ , अन्यथा  
 $H_0 : \theta = 1$  प्रतिकूल  $H_1 : \theta = 2$  का परीक्षण करने के लिए, क्रांतिक क्षेत्र और उसकी आमाप ज्ञात कीजिए।
- (c) मान लीजिए कि  $X_1, X_2, \dots, X_n$  किसी बंटन में से 3  
लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है जिसका घनत्व फलन है:  
 $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \theta > 0$ , यदि  $x > 0$   
 $= 0$ , अन्यथा;  
 $\theta^2$  का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए।
7. अपने उत्तर के समर्थन में कारण देते हुए, बताइए कि निम्नलिखित 10  
कथन सत्य हैं या असत्य :  
(a) X और Y स्वतंत्र हैं यदि और केवल यदि  
 $\text{cov}(X, Y) = 0$  हो।

- (b) यदि  $H_0 : p = 0.6$ , जब  $X \sim B(10, p)$ , और  $H_1 : \sigma^2 \geq 1$  जब  $X \sim N(0, 1)$ , हैं, तो  $H_0$  और  $H_1$  सरल परिकल्पनाएँ हैं।
- (c) यदि  $X$  और  $Y$  के बीच सहसंबंध गुणांक 0.73 है तो,  $-X$  और  $Y$  के बीच सहसंबंध गुणांक  $-0.73$  है।
- (d) यदि  $X \sim N(0, 1)$  है, तो  $-X \sim N(0, 1)$  है।
- (e) यदि कोई बंटन बिंदु 'a' के परितः सममित है, तो माध्य = a = माध्यिका है तथा सभी केन्द्रीय आघूर्ण शून्य होते हैं।
-