02202

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2010

MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50
(Weightage 70%)

Note : *Answer any five questions. All computation may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation 6

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Taking end points of this interval as initial approximations, perform 3 iterations of the Regula - Falsi method.

(b) Using the data 4

x	-1	0	2	3	5
$f(x)$	6	4	6	10	24

Obtain Newton's divided differences interpolating polynomial.

2. (a) Using Lagrange interpolation and the data : 4

x	-1	0	1	3
$f(x)$	0	1	2	28

Find the approximate value of $f(2)$.

(b) Using Euler's method with step length $h=0.2$, find the approximate value of $y(0.6)$ for the initial value problem $y' = \frac{x}{y}, y(0)=1$. 3

(c) For the differentiation method 3

$$y'(x_0) = ay(x_0+h) + by(x_0)$$

find the values of a and b so that the method is of highest possible order.

3. (a) Using Gauss - Jordan method, find the inverse of the matrix. 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b) Using Simpson's rule of integration with $h=1$ and $h=\frac{1}{2}$, find the approximate value of 6

$$I = \int_2^4 \left(x^4 + 1\right) dx.$$

Obtain the improved value using Romberg integration.

4. (a) Set up the Gauss - Jacobi iteration scheme in matrix form to solve the linear system of equations 5

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determine whether the iteration scheme converges or not.

(b) Determine the step size h that can be used in the tabulation of a function $f(x), a \le x \le b$, at equally spaced nodal points so that the truncation err or of the quadratic interpolation is less than ε. 5

5. (a) How should the constant α be chosen to ensure the fastest possible convergence with the iteration formula 5

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}$$

(b) Perform three iterations of the power method to find the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding eigenvector of the matrix. 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Solve the system of equations 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Using LU factorization method.
Use $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$.

(b) Use the central difference interpolation formula of Stirling to find the value of y at $x = 1.60$ from the following table. 5

x	1.0	1.25	1.50	1.75	2.00
y	1.000	1.077	1.145	1.205	1.26

7. (a) Using Runge – Kutta fourth order method with $h = 0.2$, obtain the approximate value of $y\ (0.2)$ for the initial value problem. 5

$$y' = y + x^3,\ y\ (0) = 2.$$

(b) Perform two iterations of the Birge – vietta method to find a root of the polynomial 5

$$P\ (x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Take the initial approximation $p_0 = 0.5$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे — *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकरित किर सकते हैं। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

1. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता है। इस अंतराल के अन्त्य बिन्दुओं को आदि सन्निकटन मान कर मिथ्या स्थिति विधि की तीन पुनरावृतियाँ कीजिए। 6

   (b) निम्नलिखित आँकड़ों से न्यूटन का विभाजित अंतर अंतर्वेशन बहुपद प्राप्त कीजिए। 4

x	-1	0	2	3	5
$f(x)$	6	4	6	10	24

2. (a) लग्रोंज अंतर्वेशन और निम्नलिखित आँकड़ों का प्रयोग करते हुए $f(2)$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए : 4

x	-1	0	1	3
$f(x)$	0	1	2	28

(b) सोपान लंबाई $h=0.2$ लेकर आदि मान समस्या 3

$y' = \frac{x}{y}, y(0)=1$ के लिए आयलर विधि द्वारा $y(0.6)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

(c) अवकलन विधि $y'(x_0)=ay(x_0+h)+by(x_0)$ 3

के लिए a और b के मान प्राप्त कीजिए जिससे कि विधि की कोटि अधिकतम हो।

3. (a) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(b) $h=1$ और $h=\frac{1}{2}$ लेकर समाकलन के सिम्पसन नियम 6

द्वारा $I = \int_2^4 \left(x^4 + 1\right) dx$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। राम्बर्ग समाकलन द्वारा प्राप्त परिणाम में सुधार कीजिए।

4. (a) निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करने के लिए गाउस–जैकोबी पुनरावृत्ति विधि को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए। 5

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

दिखाइए कि पुनारावृत्ति विदि अभिसरित होती है या नहीं।

(b) एक ऐसी सोपान लंबाई h निर्धारित कीजिए जिसे समदूरी आसंधि बिन्दुओं पर फलन $f(x)$, $a \leq x \leq b$, को तालिकाबद्ध करने में प्रयोग किया जा सके जिससे कि द्विघाती अंतर्वेशन की रुडंन–त्रुटि ε से कम हो। 5

5. (a) अचर α किस प्रकार चुना जाए जिससे कि पुनरावृत्ति सूत्र 5

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}$$

द्वारा तीव्रतम अभिसरण संभव हो सके।

(b) घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

की परिमाण में महत्तम आइगनमान और उसके संगत आइगनसदिश ज्ञात कीजिए।

6. (a) LU वियोजन विधि से समीकरण निकाय 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

को हल कीजिए। $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ का इस्तेमाल करें।

(b) केंद्रीय अंतर अंतर्वेशन स्टर्लिंग सूत्र द्वारा निम्नलिखित तालिका से $x = 1.60$ पर y का मान ज्ञात कीजिए। 5

x	1.0	1.25	1.50	1.75	2.00
y	1.000	1.077	1.145	1.205	1.26

7. (a) $h = 0.2$ लेकर आदि मान समस्या 5

$y' = y + x^3, y\ (0) = 2$ के लिए चतुर्थ कोटि रुंगे-कुट्टा विधि द्वारा $y\ (0.2)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए।

(b) बहुपद $P\ (x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ का मूल ज्ञात करने के लिए बर्जे-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। आदि सन्निकट $p_0 = 0.5$ लीखिए। 5