

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

## Term-End Examination

December, 2010

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

## MTE-1 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

**Note :** Question no. 1 is compulsory. Solve any four from the remaining questions. The use of calculator is not allowed.

1. Which of the following statements are true ? 10

Justify your answers.

- (a) The function  $f$ , given by

$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$ , has a point of inflection.

(b)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_3^{3x^2} \tan t^2 dt \right] = 6x \sec^2(3x^2)$ .

- (c) The function  $y = \sin x$  is monotonic on

$\left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ .

- (d) The graph of the function  $y = x - |x|$  lies in the 3rd quadrant only.

- (e) The tangent to  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  at  $(2, 0)$  is parallel to the  $x$ -axis.

2. (a) If  $y = e^{m \tan^{-1} x}$ , show that 3  
 $(1 + x^2)y_{n+1} + (2nx - m)y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$ .

(b) Write down the Taylor's series for  $\cos 4x$  3  
around zero. Hence, find out for which  
value(s) of  $k$  the function  $f$ , given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}, & \text{when } x \neq 0 \\ k(2 + \sin^2 x), & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is continuous at  $x = 0$ .

(c) Find the length of the curve given by 4  
 $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  lying in  $0 \leq t \leq \pi$ .

3. (a) Find the derivative of  $\cos^{-1}(1 - 2x^2)$  with 3  
respect to  $\cos^{-1}(\sqrt{1 - x^2})$ .

(b) Evaluate  $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$ . 3

(c) Give an example of a function which is 2  
one-one when defined on a domain  $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ ,  
but not when defined on a domain  $D_2 \subseteq \mathbb{R}$ .  
Justify your choice of example.

(d) Give an example, with justification, of a 2  
function with domain  $[2, 5]$  which is *not*  
integrable.

4. (a) Find the maximum height of the curve  $y = 4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x$  above the  $x$ -axis. 3

(b) Evaluate  $\int \frac{(4 - 2x) dx}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$ . 4

- (c) Find the intervals of  $R$ , where the function  $f$ , defined by  $f(x) = x^3 - 27x + 36$ , is increasing or decreasing. 3

5. (a) Prove that 4

$$I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^n x \, dx = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}, \text{ and}$$

hence evaluate  $I_4$ .

- (b) Find the equations of the tangent and normal to the curve 3

$$x = t^2, y = t^3 \text{ at } t = 2.$$

- (c) Find an approximate value of  $\ln 2$ , by 3

solving the definite integral  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ , using the

Trapezoidal rule with 5 ordinates.

6. Trace the curve  $y = x + \frac{1}{x}$ , stating all the 10  
properties you use for doing so.

7. (a) Find the area of the region bounded by the curve  $a^4 y^2 = x^5 (2a - x)$ . 4
- (b) Graph the function  $f$ , defined by  $f(x) = |x| + |x-1|$ . Also give its domain and range. 4
- (c) Evaluate  $\int_0^2 [x] dx$ . 2
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2010

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-1 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना ज़रूरी है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 10

(a)  $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$  द्वारा परिभाषित फलन

$f$  का एक नतिपरिवर्तन बिंदु होता है।

(b)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_3^{3x^2} \tan t^2 dt \right] = 6x \sec^2(3x^2)$ .

(c) फलन  $y = \sin x$   $\left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  पर एकदिष्ट है।

(d) फलन  $y = x - |x|$  का आलेख केवल तीसरे चतुर्थांश में स्थित होता है।

(e) (2.0) पर  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  की स्पर्श रेखा  $x -$  अक्ष के समांतर है।

2. (a) यदि  $y = e^{m \tan^{-1} x}$ , तब दिखाइए कि 3  
 $(1 + x^2)y_{n+1} + (2nx - m)y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0.$

(b)  $\cos 4x$  के लिए शून्य के गिर्द टेलर श्रेणी लिखिए। इस तरह ज्ञात कीजिए कि  $k$  के किस (किन) मान (मानों) के लिए 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}, & \text{जब } x \neq 0 \\ k(2 + \sin^2 x), & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $f$ ,  $x=0$  पर संतत है।

(c)  $0 \leq t \leq \pi$  में स्थित  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  द्वारा दिए गए वक्र की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4

3. (a)  $\cos^{-1}(\sqrt{1-x^2})$  के सापेक्ष  $\cos^{-1}(1-2x^2)$  का अवकलज ज्ञात कीजिए। 3

(b)  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$  का मान निकालिए। 3

- (c) एक ऐसे फलन का उदाहरण दीजिए जो प्रांत  $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ , 2  
पर परिभाषित होने पर एकैकी होता है लेकिन जब वह  
प्रांत  $D_2 \subseteq \mathbb{R}$  पर परिभाषित होता है, तब एकैकी नहीं  
होता। अपने उदाहरण के चयन की पुष्टि कीजिए।
- (d) प्रांत  $[2, 5]$  वाले एक ऐसे फलन का पुष्टियुक्त उदाहरण 2  
दीजिए जो समाकलनीय नहीं है।
4. (a)  $x$ -अक्ष के ऊपर वक्र  $y = 4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x$  की 3  
अधिकतम ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- (b)  $\int \frac{(4 - 2x) dx}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$  का मान निकालिए। 4
- (c)  $\mathbb{R}$  के वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जहाँ 3  
 $f(x) = x^3 - 27x + 36$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$   
वर्धमान या ह्रासमान है।
5. (a) सिद्ध कीजिए कि 4
- $$I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^n x dx = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}, \text{ और}$$
- इस तरह  $I_4$  का मान निकालिए।
- (b)  $t=2$  पर वक्र  $x=t^2, y=t^3$  की स्पर्श रेखा और 3  
अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(c) 5 कोटियो वाले समलंबी नियम से निश्चित समाकल 3

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \text{ को हल करके } \ln 2 \text{ का सन्निकट मान ज्ञात}$$

कीजिए।

6. वक्र  $y = x + \frac{1}{x}$  का अनुरेखण कीजिए, और ऐसा करते हुए 10

आपने जिन गुणों का उपयोग किया वे भी बताइए।

7. (a) वक्र  $a^4 y^2 = x^5 (2a - x)$  द्वारा परिबद्ध प्रदेश का 4  
क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b)  $f(x) = |x| + |x-1|$  द्वारा परिभाषित फलन  $f$  को 4  
आलेखित कीजिए। इसके प्रांत और परिसर भी दीजिए।

(c)  $\int_0^2 [x] dx$  का मूल्यांकन कीजिए। 2