No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2015

00408

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : ***All*** *questions are* ***compulsory****, but internal choices are given. Symbols have their usual meanings. The marks for each question are indicated against it.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Determine the eigenvalues of the following matrix :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) For the complex variable z, show that $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$.

(c) Using the recurrence relation

$(2m + 1)x\, P_m(x) = (m + 1)\, P_{m+1}(x) + mP_{m-1}(x)$,

obtain $P_2(x)$.

(d) Obtain the Laplace transform of sin pt.

(e) Show that the set of all matrices of order $m \times n$ is a group under addition of matrices.

(f) Show that velocity is a contravariant vector.

(g) Calculate the residue of the function $f(z) = e^{1/z}$ at the singular point.

(h) Using the Rodrigues' formula for Hermite polynomials $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, evaluate $H_2(x)$.

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Determine the eigenvalues and the eigenvectors of the following matrix M :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Prove that the eigenvectors of a Hermitian matrix belonging to distinct eigenvalues are orthogonal to each other.

(c) Show that the set of elements {1, i, −1, −i} forms a group under multiplication.

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Calculate the value of the following contour integral :

$$\oint_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z^2+4)}$$

where C is the circle defined by $|z| = 4$.

(b) Evaluate the integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$ by using the method of residues, when $-1 < a < 1$.

(c) Obtain the analytic function whose real part is $u(x, y) = e^x \cos y$.

4. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Determine the Fourier cosine transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} (2-x) & \text{for} \quad 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

(b) Calculate the Laplace transform of the function $f(t) = t \cos pt$, $p > 0$.

(c) Calculate the inverse Laplace transform of

$$\frac{s}{(s-1)^2 - 4}.$$

5. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) The following is the generating function for Laguerre polynomials :

$$g(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n , \ |t| < 1$$

Using this, obtain the following recurrence relation :

$$(n+2)L_{n+2}(x) = (2n+3-x)L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x)$$

(b) Expand the function $f(x) = 1 + x^2$ in a Legendre series of the form $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$.

(c) Bessel function of the first kind of order m is defined by the following :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Show that

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2015

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न* ***अनिवार्य*** *हैं, लेकिन आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग हल कीजिए : *5×2=10*

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनमान निर्धारित कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ख) सम्मिश्र चर z के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z.$$

(ग) पुनरावृत्ति सम्बन्ध

$$(2m + 1)x\, P_m(x) = (m + 1)\, P_{m+1}(x) + mP_{m-1}(x),$$

का उपयोग कर $P_2(x)$ का मान प्राप्त कीजिए ।

(घ) $\sin pt$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(ङ) सिद्ध कीजिए कि आव्यूहों के योग के अधीन कोटि $m \times n$ वाले सभी आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है ।

(च) सिद्ध कीजिए कि वेग प्रतिपरिवर्ती सदिश है ।

(छ) विचित्र बिन्दु पर फलन $f(z) = e^{1/z}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

(ज) हर्मिट बहुपदों के रोड्रिगेज़ सूत्र

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$ का उपयोग कर, $H_2(x)$ परिकलित कीजिए ।

2. कोई ***दो*** भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित आव्यूह M

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान और आइगेनसदिश निर्धारित कीजिए ।

(ख) सिद्ध कीजिए कि हर्मिटी आव्यूह के भिन्न आइगेनमानों के संगत आइगेनसदिश एक-दूसरे के प्रति लांबिक होते हैं ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि गुणन के अधीन अवयवों का समुच्चय $\{1, i, -1, -i\}$, एक समूह बनाता है ।

3. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित कन्टूर समाकल का मान परिकलित कीजिए :

$$\oint_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z^2+4)}$$

जहाँ C वृत्त $|z| = 4$ से परिभाषित है ।

(ख) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर समाकल

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$$

परिकलित कीजिए, जबकि $-1 < a < 1$ है ।

(ग) वह विश्लेषिक फलन प्राप्त कीजिए जिसका वास्तविक भाग $u(x, y) = e^x \cos y$ है ।

4. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) फलन

$$f(x) = \begin{cases} (2-x) & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

का फूरिये कोसाइन रूपांतर निर्धारित कीजिए ।

(ख) फलन $f(t) = t \cos pt$, $p > 0$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

(ग) $\frac{s}{(s-1)^2-4}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

5. कोई **दो** भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) लागेर बहुपदों का जनक फलन निम्नलिखित है :

$$g(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \ , \ |t| < 1$$

इसका उपयोग कर, निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध प्राप्त कीजिए :

$$(n+2)L_{n+2}(x) = (2n+3-x)L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x)$$

(ख) फलन $f(x) = 1 + x^2$ का लेजान्ड्रे श्रेणी

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$$ के रूप में प्रसार कीजिए ।

(ग) कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$