No. of Printed Pages : 8

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01068

June, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **1** is **compulsory**. Do any **four** questions out of questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. Are the following statements *true* or *false* ? Give reasons for your answer. *10*

(a) 2 is not a limit point of the interval, $]-3, 3]$.

(b) The function f given by

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ 1, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is continuous on $[0, 1]$.

(c) The series

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

is a convergent series.

(d) The function f defined by

$$f(x) = | x - \sqrt{2} | \ \forall\, x \in \mathbf{R}$$

has a critical point at $x = \sqrt{2}$.

(e) If a function has finitely many points of discontinuities, then the function is not integrable.

2. (a) State the order completeness property of the set $\mathbf{R}$ of real numbers. Use it to show that $S = \left\{ \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$ has supremum as well as infimum in $\mathbf{R}$. *3*

(b) Assuming the validity of the expansion, expand $\tan^{-1} x$ in powers of x upto the term containing x^4. *5*

(c) Find the following limit, if it exists : *2*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x^3}{1 - \cos x^3}$$

3. (a) Prove that the sequence, $< a_n >$ where $a_n = \frac{2^2}{n^2 + 3^2}$, converges to zero. *3*

(b) Let f be the function defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{if } x \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{3x^2 - 2}{x}, & \text{if } x \in [1, 2[\\ (1 + 2x)^2, & \text{if } x \in [2, \infty[. \end{cases}$$

Discuss the continuity of f on $]-\infty, \infty[$. *4*

(c) Justify that $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{1}{(2x-3)^2} = \infty$. 3

4. (a) Examine the function,

$$(x-3)^5 \cdot (x+4)^7$$

for extreme values. 4

(b) Let $f : [0, 1] \to R$ be a function defined by $f(x) = x^2$. Let $P_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ and $P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ be two partitions of the interval, $[0, 1]$. Show that $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$. 4

(c) Give an example of a function, with justification, which is both trigonometric and one-one. 2

5. (a) Find the limit as $n \to \infty$, of the sum

$$\frac{n}{3n^2+1^2} + \frac{n}{3n^2+2^2} + \frac{n}{3n^2+3^2} + \ldots + \frac{1}{4n}.$$

3

(b) Show that $1 + x \leq e^x$, $\forall\, x \in [0, \infty[$. Does the inequality hold for $x < 0$? Justify your answer. 3

(c) Test the following series for convergence : 4

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n^4+5} - \sqrt{n^4-5}\right.$

6. (a) Using principle of induction, prove that 7 is a factor of

$$3^{2n-1} + 2^{n+1} \ \forall \ n \in \mathbf{N}.$$ 4

(b) Examine the convergence of the series : 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

(c) Check whether the following sets are open or closed or neither : 3

(i) $]1, 5[\cup [3, 6]$

(ii) $\{5n : n \in \mathbf{N}\}$

7. (a) Show that the sequence $< f_n >$ where $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}$, is not uniformly convergent on [0, 1]. 3

(b) Use Cauchy's test to examine the convergence or divergence of the series : 4

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right) + \ldots$$

(c) Show that every polynomial function $f : [0, 1] \to [0, 1]$ has a fixed point. 3

एम.टी.ई.-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2015
ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

1. बताइए निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं अथवा *असत्य* । अपने उत्तर के कारण दीजिए । *10*

   (क) 2, अन्तराल $]-3, 3]$ का सीमा बिन्दु नहीं है ।

   (ख) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$

   द्वारा दिया गया फलन f, $[0, 1]$ पर संतत है ।

   (ग) श्रेणी $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$ एक अभिसारी श्रेणी है ।

(घ) $f(x) = |x - \sqrt{2}|\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f का $x = \sqrt{2}$ पर क्रांतिक बिन्दु होता है ।

(ङ) यदि किसी फलन के असांतत्य-बिन्दु परिमित संख्या में हैं, तो वह फलन समाकलनीय नहीं होगा ।

2. (क) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}$ के क्रम पूर्णता गुणधर्म का कथन दीजिए । इसका प्रयोग करते हुए दिखाइए कि $\mathbb{R}$ में $S = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{R} \right\}$ का उच्चक तथा निम्नक होता है । *3*

(ख) यह मानकर कि प्रसार मान्य है, x की घात में $\tan^{-1} x$ का प्रसार तब तक कीजिए जब तक x की घात चार (x^4) होती है । *5*

(ग) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व हो : *2*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x^3}{1 - \cos x^3}$$

3. (क) सिद्ध कीजिए कि $a_n = \dfrac{2^2}{n^2 + 3^2}$, द्वारा परिभाषित अनुक्रम $< a_n >$, शून्य की ओर अभिसरित होता है । *3*

(ख) मान लीजिए f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन है :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{यदि } x \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{3x^2 - 2}{x}, & \text{यदि } x \in [1, 2[\\ (1 + 2x)^2, & \text{यदि } x \in [2, \infty[\end{cases}$$

$]-\infty, \infty[$ पर f के सांतत्य की चर्चा कीजिए । *4*

(ग) पुष्टि कीजिए कि $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{1}{(2x-3)^2} = \infty$. 3

4. (क) चरम मानों के लिए फलन $(x-3)^5 \cdot (x+4)^7$ की जाँच कीजिए । 4

(ख) मान लीजिए $f : [0, 1] \to R$, $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन है । मान लीजिए

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\} \text{ और } P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

अन्तराल [0, 1] के दो विभाजन हैं । दिखाइए कि $L(P_1, f) \le U(P_2, f)$. 4

(ग) पुष्टि सहित एक ऐसे फलन का उदाहरण दीजिए जो त्रिकोणमितीय और एकैकी दोनों हो । 2

5. (क) योगफल

$$\frac{n}{3n^2+1^2} + \frac{n}{3n^2+2^2} + \frac{n}{3n^2+3^2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

की सीमा ज्ञात कीजिए, जबकि $n \to \infty$ हो । 3

(ख) दिखाइए कि $1 + x \le e^x$, $\forall\, x \in [0, \infty[$. क्या $x < 0$ के लिए यह असमिका लागू होती है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ग) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए : 4

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n^4+5} - \sqrt{n^4-5}\right]$$

6. (क) आगमन सिद्धांत द्वारा सिद्ध कीजिए कि 7,

$$3^{2n-1} + 2^{n+1} \; \forall \; n \in \mathbf{N}$$

का गुणनखंड है । *4*

(ख) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$ के अभिसरण की जाँच कीजिए । *3*

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय संवृत्त हैं या विवृत्त या दोनों में से कोई नहीं : *3*

(i) $]1, 5[\cup [3, 6]$

(ii) $\{5n : n \in \mathbf{N}\}$

7. (क) दिखाइए कि $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $< f_n >$, $[0, 1]$ पर एकसमानतः अभिसारी नहीं है । *3*

(ख) कॉशी परीक्षण द्वारा निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण या अपसरण की जाँच कीजिए : *4*

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right) + \ldots$$

(ग) दिखाइए कि प्रत्येक बहुपद फलन $f : [0, 1] \to [0, 1]$ का नियत बिन्दु होता है । *3*
