No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

03208

June, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answer. *10*

(a) $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ is in 1^{∞} form as $x \to 0$.

(b) $z = f(x^2y)$ where f is differentiable satisfies $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

(c) The function $f(x, y) = (3x - 5y,\ 5x + 3y)$ is locally invertible on its domain.

(d) The function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{if } x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = y = 0 \end{cases}$$

possesses a limit at the origin.

(e) The area of the region
$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 10x \}$ is

$$\int_0^1 \int_1^{10x} dx\, dy.$$

2. (a) Show that the repeated limits exist at the origin and are equal but the simultaneous limit does not exist, where *4*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } xy \neq 0 \\ 0 & \text{if } xy = 0. \end{cases}$$

(b) Find the volume of the region lying in the first octant which is common to the two cylinders $z^2 + x^2 = 4$ and $x^2 + y^2 = 4$. *4*

(c) Find the supremum (least upper bound) of $\{x \mid (x - 1)(x - 3) \leq 0\}$. Justify your answer. *2*

3. (a) Evaluate : *2*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + 1}$$

(b) Let $x = 4e_1 + 7e_2 - 8e_3$, $y = 7e_1 + 3e_2 - 9e_3$, where e_1, e_2, e_3 are unit vectors. Find $|2x - y|$. *3*

(c) Find the second Taylor's polynomial for the function $f(x, y) = ln\ (1 + 2x + y)$ for points close to (2, 1). 5

4. (a) Check whether the function

$$f(x, y) = \max\left\{\frac{x}{y},\ y\right\}$$

is homogeneous. If so, find its degree. 2

(b) Examine the following function f(x, y) for local extrema :

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x + 4y + 7$$ 4

(c) Find the range of the function f defined by $f(x, y) = 13 - x^2 - y^2$ for all (x, y) for which $x^2 + y^2 = 9$. Sketch any one of its level curves. 4

5. (a) Define Implicit Function Theorem. Does a unique solution exist for the function $f(x, y) = y^2 - yx^2 - 2x^5$ in the neighbourhood of $(1, -1)$. 5

(b) Evaluate the following by converting to cylindrical coordinates

$$\iiint_S \frac{z}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz\,, \text{ where}$$

$S = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, 1 \leq z \leq 4\}$. 5

6. (a) If $u = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x}$, $v = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}$, $w = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}$, then

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}.$$ *5*

(b) Is $f(x) = \left(\cot^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$ an indeterminate form as $x \to 0$. Find $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, if possible. *3*

(c) Check whether the function $F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$ is conservative. *2*

7. (a) Find the work done by a force $F = (x^2y, xy^2)$ in moving a particle from (0, 0) to (1, 2) along the line $y = 2x$. *4*

(b) Check whether the following function is continuous at (0, 0):

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Is it differentiable at (0, 0) ? Justify your answer. *4*

(c) Find $\dfrac{dw}{dt}$ if $w = xy + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$. *2*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *10*

(क) $x \to 0$ होने पर $(\cot x)^{\frac{1}{ln\, x}}$, 1^{∞} प्रकार का होगा ।

(ख) $z = f(x^2y)$ जहाँ f अवकलनीय है

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$ को संतुष्ट करता है ।

(ग) फलन $f(x, y) = (3x - 5y,\ 5x + 3y)$ अपने प्रांतों पर स्थानिकत: व्युत्क्रमणीय है ।

(घ) फलन $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{यदि} \quad x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{यदि} \quad x = y = 0 \end{cases}$

की मूल-बिन्दु पर सीमा होती है ।

(ङ) प्रदेश $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 10x \}$ का क्षेत्रफल $\int_0^1 \int_1^{10x} dx\, dy$ है ।

2. (क) दिखाइए कि निम्नलिखित मूल-बिन्दु पर पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व होता है और वे बराबर होती हैं लेकिन युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं होता, जहाँ 4

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{यदि} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{यदि} \quad xy = 0. \end{cases}$$

(ख) प्रथम अष्टांशक में स्थित दो बेलनों $z^2 + x^2 = 4$ और $x^2 + y^2 = 4$ के सार्वनिष्ठ प्रदेश का आयतन ज्ञात कीजिए । 4

(ग) $\{x \mid (x - 1)(x - 3) \leq 0\}$ का उच्चक (न्यूनतम उपरि परिबंध) ज्ञात कीजिए । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 2

3. (क) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + 1}$ का मूल्यांकन कीजिए । 2

(ख) मान लीजिए

$$x = 4e_1 + 7e_2 - 8e_3, \quad y = 7e_1 + 3e_2 - 9e_3$$

जहाँ e_1, e_2, e_3 एकक सदिश हैं । $|2x - y|$ ज्ञात कीजिए । 3

(ग) (2, 1) के निकट स्थित बिन्दुओं के लिए फलन

$$f(x, y) = ln\,(1 + 2x + y)$$

का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए । 5

4. (क) जाँच कीजिए कि फलन $f(x, y) = \max\left\{\frac{x}{y}, y\right\}$ समघात है या नहीं है । यदि है, तो इसकी घात ज्ञात कीजिए । 2

(ख) स्थानीय चरममान के लिए निम्नलिखित फलन f(x, y) की जाँच कीजिए :

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x + 4y + 7$$ 4

(ग) सभी (x, y) के लिए $f(x, y) = 13 - x^2 - y^2$ द्वारा परिभाषित फलन f का परिसर ज्ञात कीजिए, जिसके लिए $x^2 + y^2 = 9$. इसका कोई एक स्तर वक्र बनाइए । 4

5. (क) अस्पष्ट फलन प्रमेय को परिभाषित कीजिए । (1, –1) के प्रतिवेश में फलन $f(x, y) = y^2 - yx^2 - 2x^5$ का क्या अद्वितीय हल होता है ? 5

(ख) निम्नलिखित को बेलनाकार निर्देशांकों में परिवर्तित करके इनका मूल्यांकन कीजिए :

$$\iiint_S \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz\,,\ \text{जहाँ}$$

$S = \{(x, y, z) : 1 \le x^2 + y^2 \le 3,\ 1 \le z \le 4\}$. 5

6. (क) यदि $u = \frac{x^2+y^2+z^2}{x}$, $v = \frac{x^2+y^2+z^2}{y}$, $w = \frac{x^2+y^2+z^2}{z}$, तब

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}.$$ 5

(ख) क्या $f(x) = \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \to 0$ होने पर अनिर्धार्य रूप का है ? यदि संभव हो, तब $\lim_{x\to 0} f(x)$ ज्ञात कीजिए । 3

(ग) जाँच कीजिए कि फलन

$F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$ संरक्षी है या नहीं । 2

7. (क) रेखा $y = 2x$ के अनुदिश $(0, 0)$ से $(1, 2)$ तक एक कण को ले जाने में बल $F = (x^2y, xy^2)$ द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए । 4

(ख) जाँच कीजिए कि $(0, 0)$ पर निम्नलिखित फलन संतत है या नहीं :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

क्या यह $(0, 0)$ पर अवकलनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 4

(ग) यदि $w = xy + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, तब $\frac{dw}{dt}$ ज्ञात कीजिए । 2