

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2015**

00538

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note :** *Question no. 1 is compulsory. Answer any four questions from questions number 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

---

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answer with a short proof or a counter-example.  $5 \times 2 = 10$
- (a) " $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$  is a rational number" is a statement.
- (b) If  $K_{m,n}$  is Hamiltonian, then it is Eulerean.
- (c) Every 3-regular graph has a 3-cycle.
- (d) The number of reflexive relations on the set  $A = \{1, 2, 3\}$  is 2.
- (e) The generating function of the recurrence relation

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \text{ is } \frac{\sin x}{(x-1)(x-2)}.$$

2. (a) Find the conjunctive normal form of the Boolean expression without using tables

$$[(x_1 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2')]' \quad 3$$

- (b) How many distinct integer solutions are there of the equation  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 30$ , where  $x_i \geq i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ ? 3

- (c) Draw a 5-regular graph having 8 vertices. 2

- (d) Let  $G$  be a  $(p, q)$ -graph and  $\bar{G}$  be its complement. Show that

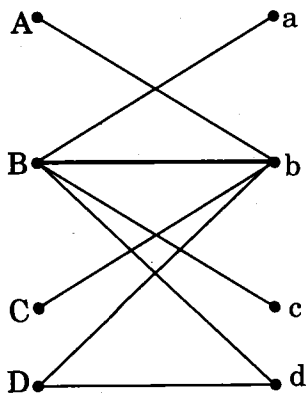
$$d_G(x) + d_{\bar{G}}(x) = p - 1, \quad \forall x \in G. \quad 2$$

3. (a) Two dice are thrown. Find the probability of getting an even total. 4

- (b) Solve the recurrence relation,  
 $a_{n+1}^2 = 9 a_n^2$ ,  $a_n > 0$  and  $a_0 = 9$ . 2

- (c) Prove, by Mathematical Induction, that  
 $2^n > C(n, 3)$ ,  $\forall n \geq 3, n \in \mathbf{N}$ . 4

4. (a) Define a complete matching in a bipartite graph. Check whether or not, there is a complete matching in the following graph : 3



- (b) Write the following argument in symbolic form :

“Either Mariam will eat a burger or she will not visit a zoo. She will visit a zoo. Therefore she will not eat a burger.” Also test the validity of this argument. 3

- (c) Consider the sequence of integers 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. How many permutations of this sequence are there in which 4, 6, 8 do not occupy their original position in the sequence? 2

- (d) If  $F(x)$  be the generating function of the sequence  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , what is the generating function of the sequence  $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots$ ? 2

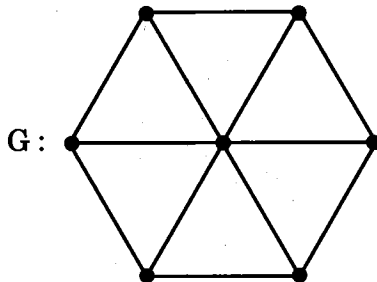
5. (a) How many positive integers less than or equal to 1000 are not divisible by any of 3, 5 or 7? 4

- (b) Solve the recurrence relation

$$a_n - 5 a_{n-1} + 6 a_{n-2} = 4^n$$

for  $n \geq 2$  with  $a_0 = 1$  and  $a_1 = 5$ . 4

- (c) Find the chromatic number  $X(G)$  of the following graph : 2



6. (a) Prove the identity

$$\sum_{i=0}^k C(n, i) \cdot C(n, k - i) = C(2n, k)$$

for  $0 \leq k \leq n$ . 3

- (b) Check whether or not the statement  
 $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim p \rightarrow q) \rightarrow q]$  is a tautology. 3

- (c) Solve the recurrence relation  
 $a_m = m a_{m-1} + 4(-1)^m$ , if  $m \geq 2$ , with  $a_1 = 0$ . 4

7. (a) Using the generating function technique,  
evaluate the sum

$$\sum_{k=1}^n k 2^k C(n, k). \quad 4$$

- (b) Write the converse and the contrapositive of  
the following statement : 2

“If I get 18 marks or above out of 50 marks,  
then I will pass.”

- (c) Draw a connected planar 3-regular graph  
with 8 vertices. How many regions are there  
in any plane drawing of this graph ? 4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2015

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर की संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए।

5×2=10

(क) “ $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$  एक परिमेय संख्या है” एक कथन है।

(ख) यदि  $K_{m,n}$  हैमिल्टोनियन है, तो यह ऑयलरी होगा।

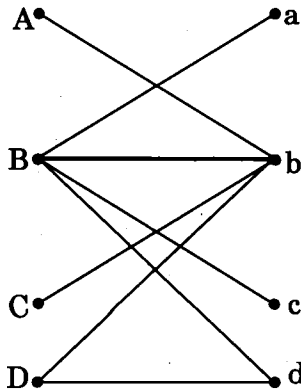
(ग) प्रत्येक 3-नियमित ग्राफ में 3-चक्र होते हैं।

(घ) समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  पर स्वतुल्य सम्बन्धों की संख्या 2 है।

(ङ) पुनरावृत्ति सम्बन्ध  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$  का

जनक फलन  $\frac{\sin x}{(x-1)(x-2)}$  है।

2. (क) सारणी का प्रयोग किए बिना, बूलीय व्यंजक  $[(x_1 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2')]'$  का संयुग्मी प्रसामान्य समघात ज्ञात कीजिए। 3
- (ख) समीकरण  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 30$ , जहाँ  $x_i \geq i$ ,  $1 \leq i \leq 6$  के कितने विभिन्न पूर्णांक हल होंगे? 3
- (ग) 8 शीर्षों वाला एक 5-नियमित ग्राफ बनाइए। 2
- (घ) मान लीजिए कि  $G$  एक  $(p, q)$ -ग्राफ है और  $\bar{G}$  इसका पूरक है। दिखाइए कि  $d_G(x) + d_{\bar{G}}(x) = p - 1, \forall x \in G$ . 2
3. (क) दो पासे फेंके जाते हैं। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योगफल एक सम संख्या है। 4
- (ख) पुनरावृत्ति सम्बन्ध  $a_{n+1}^2 = 9a_n^2, a_n > 0$  और  $a_0 = 9$  को हल कीजिए। 2
- (ग) गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि  $2^n > C(n, 3), \forall n \geq 3, n \in \mathbf{N}$ . 4
4. (क) द्विभाजित ग्राफ में पूर्ण सुमेलन को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ में पूर्ण सुमेलन है या नहीं : 3



(ख) निम्नलिखित तर्क को सांकेतिक रूप में लिखिए :

“मरियम, या तो बर्गर खाएगी या वह चिड़ियाघर देखने नहीं जाएगी । वह चिड़ियाघर देखने जाएगी । इसलिए वह बर्गर नहीं खाएगी ।” इस तर्क की मान्यता जाँच भी कीजिए ।

3

(ग) पूर्णाकों के अनुक्रम 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 को लीजिए । इस अनुक्रम के ऐसे कितने क्रमचय हैं जिनमें 4, 6, 8 अनुक्रम में अपनी मूल स्थिति में नहीं रहते ?

2

(घ) यदि  $F(x)$ , अनुक्रम  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , का जनक फलन है, तो अनुक्रम  $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots$  का जनक फलन क्या होगा ?

2

5. (क) 1000 से छोटे अथवा बराबर धनात्मक पूर्णाकों में से कितने पूर्णांक 3, 5 या 7 में से किसी से भी विभाज्य नहीं हैं ?

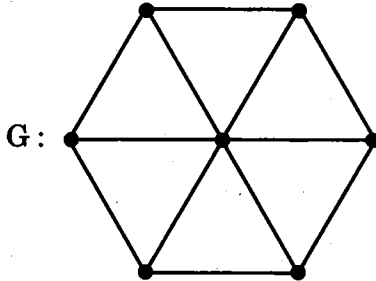
4

(ख) पुनरावृत्ति सम्बन्ध  $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 4^n$  जहाँ  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 1$  और  $a_1 = 5$  को हल कीजिए ।

4

(ग) निम्नलिखित ग्राफ की वर्णिक संख्या  $X(G)$  ज्ञात कीजिए :

2



6. (क) सर्वसमिका 
$$\sum_{i=0}^k C(n, i) \cdot C(n, k - i) = C(2n, k)$$

को सिद्ध कीजिए, जहाँ  $0 \leq k \leq n$  है । 3

(ख) जाँच कीजिए कि कथन  $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim p \rightarrow q) \rightarrow q]$  पुनरुक्ति है या नहीं । 3

(ग) पुनरावृत्ति सम्बन्ध

$a_m = m a_{m-1} + 4(-1)^m$ , यदि  $m \geq 2$ , जहाँ  $a_1 = 0$ ,  
को हल कीजिए । 4

7. (क) जनक फलन विधि का प्रयोग करके योगफल

$$\sum_{k=1}^n k 2^k C(n, k) \text{ का मान निकालिए । } 4$$

(ख) निम्नलिखित कथन का विलोम और प्रतिस्थितक  
(कॉन्ट्रापॉज़िटिव) लिखिए : 2

“यदि 50 अंकों में से मैं 18 अंक या उससे अधिक अंक  
प्राप्त करता हूँ, तो मैं उत्तीर्ण हो जाऊँगा ।”

(ग) 8 शीर्षों वाला एक सम्बद्ध समतलीय 3-नियमित ग्राफ  
बनाइए । इस ग्राफ के किसी समतल रेखाचित्र में कितने  
प्रदेश होंगे ? 4