No. of Printed Pages : 12

MTE-11

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

02198

Term-End Examination

June, 2015

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. **7** is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) Express in words the following events : 4

(i) $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

(ii) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

(iii) $A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c$

(iv) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

(b) Differentiate between skewness and kurtosis. For a positively skewed distribution, the Pearson's coefficient of skewness is 1. If the standard deviation is 5, what will be the value of third central moment m_3 ? 4

(c) Determine the constant C such that the function $f(x) = Cx^2(1 - x)^6$, $0 < x < 1$ is a probability density function. 2

2. (a) Given $f(x, y) = x\, e^{-x(y+1)}$; $x \geq 0$, $y > 0$. Find the regression curve of Y on X and identify it. 3

(b) Let X_1 and X_2 be a random sample of size 2 and $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. If $S^2 = C\,(X_1 - X_2)^2$, what is the value of C ? 2

(c) Two researchers adopted different sampling techniques while investigating the same group of students to find the number of students falling in different intelligence levels. The results are as follows :

	No. of students in each level			
Researcher	Below Average	Average	Above Average	Total
1	86	60	54	200
2	40	33	27	100
Total	126	93	81	300

At 5% level of significance, test whether the sampling techniques adopted by the two researchers are different.

(Given : at 5% level, the values of χ^2 for 2 d.f. and 6 d.f. are 5·991 and 12·592 respectively) 5

3. (a) A and B are two students of MTE-11 and the probabilities of their solving a problem correctly are $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{8}$ respectively. The probability of their making a common error and getting the same answer is $\frac{1}{525}$. Find the probability that their answer is correct. *3*

(b) For the following frequency table, obtain the relative frequencies and the cumulative frequencies of the 'more than' type.

Distribution of 250 lamp bulbs in terms of life (in hours)	
Life (in hours)	Frequency
499·5 – 649·5	5
649·5 – 799·5	20
799·5 – 949·5	40
949·5 – 1099·5	81
1099·5 – 1249·5	57
1249·5 – 1399·5	34
1399·5 – 1549·5	13
Total	250

Also, determine the number of bulbs having a life of 1249·5 hours or less. *3*

(c) X is a random variable taking values 0 and 1 with respective probabilities q and p. A sample $X_1, X_2, ..., X_n$ of size n is taken from the distribution. If $r = \sum_{i=1}^{n} X_i$, show that $\frac{r+1}{n+1}$ is a biased estimator of p. Also show that the bias of the estimator tends to zero as n tends to infinity. *4*

4. (a) Consider the following probability distribution :

$Y \downarrow$ \ $X \rightarrow$	-1	0	1
-1	–	$\frac{1}{6}$	–
0	$\frac{1}{6}$	–	$\frac{1}{3}$
1	–	$\frac{1}{3}$	–

Find r(X, Y). Are X and Y independent ? Give reason. *5*

(b) Suppose X and Y are independent random variables with the same probability density function $f(x) = \theta e^{-\theta x}$; $x \geq 0$. Find the probability density function of $Z = \min (X, Y)$. *5*

5. (a) A single observation is to be used to test the null hypothesis that the mean of exponential population is $\theta = 10$ hours against the alternative that $\theta \neq 10$ hours. The null hypothesis is to be rejected if the observed value is less than 8 or greater than 12.

(i) Find the probability of type I error.

(ii) Find the probability of type II error when $\theta = 2$.

(iii) Also, find the power function of the test. *4*

(b) Compute the expectation and variance of the random variable Y whose probability density function is $f(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{for } -1 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ *6*

6. (a) The means of bivariate frequency distributions are at (3, 4) and the correlation coefficient is 0·4. The line of regression of Y on X is parallel to the line $Y = X$. Find the two lines of regression and estimate the value of X when $Y = 1$. *5*

(b) A random variable X takes the values -1, 1, 3, 5 with associated probabilities $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ and $\frac{1}{2}$ respectively. Find $P(|X - 3| \geq 1)$. Also, find an upper bound to this probability using Chebychev's inequality. *5*

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Give a short proof or a counter-example for your answer. *10*

(a) For any two events A and B, $P(A \cup B)$ cannot be greater than either P(A) or P(B).

(b) Mean square deviation about any arbitrary value A is minimum when A is median.

(c) If $X_1, X_2, ..., X_n$ be a random sample from a normal population with mean 0 and variance θ^2, then $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ is an unbiased estimator of θ.

(d) If X follows beta distribution with parameters α and β, then $1 - X$ is a beta random variable with parameters $1 - \alpha$ and $1 - \beta$.

(e) If $Y \sim N(1, 4)$, then $P(1 < Y < 10) \cong 0{\cdot}5$.

एम.टी.ई.-11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2015
ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. **7** **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) निम्नलिखित घटनाओं को शब्दों में व्यक्त कीजिए : *4*

(i) $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

(ii) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

(iii) $A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c$

(iv) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

(ख) वैषम्य और ककुदता में अंतर बताइए । एक धनात्मक वैषम्य बंटन के लिए, पियर्सन वैषम्य गुणांक 1 है । यदि मानक विचलन 5 है, तो तृतीय केन्द्रीय आघूर्ण m_3 का मान क्या होगा ? *4*

(ग) अचर C का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन $f(x) = Cx^2(1-x)^6$, $0 < x < 1$ एक प्रायिकता घनत्व फलन होगा । 2

2. (क) दिया गया है कि $f(x, y) = x\, e^{-x(y+1)}$; $x \geq 0$, $y > 0$. Y का X पर समाश्रयण वक्र ज्ञात कीजिए और इसकी पहचान कीजिए । 3

(ख) मान लीजिए कि X_1 और X_2 आमाप 2 वाला एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है और $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. यदि $S^2 = C(X_1 - X_2)^2$ है, तो C का मान क्या होगा ? 2

(ग) दो अन्वेषक, भिन्न बुद्धि स्तरों वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करने के लिए एक ही समूह के विद्यार्थियों का अन्वेषण करने के लिए भिन्न-भिन्न प्रतिदर्श युक्तियाँ अपनाते हैं । उनके परिणाम निम्नलिखित हैं :

	प्रत्येक स्तर में विद्यार्थियों की संख्या			
अन्वेषक	औसत से कम	औसत	औसत से अधिक	कुल
1	86	60	54	200
2	40	33	27	100
कुल	126	93	81	300

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि क्या दोनों अन्वेषकों द्वारा अपनाई गई प्रतिदर्श युक्तियाँ भिन्न हैं । (दिया गया है कि 5% स्तर पर 2 और 6 स्वातन्त्र्य कोटि के लिए χ^2 का मान क्रमशः 5·991 और 12·592 है) 5

3. (क) A और B, MTE-11 के दो विद्यार्थी हैं और उनकी एक समस्या को ठीक हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{8}$ हैं । दोनों की एक ही ग़लती करने और एक ही उत्तर प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{525}$ है । वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि उनका उत्तर सही है । *3*

(ख) निम्नलिखित बारंबारता सारणी के लिए 'से अधिक' प्रकार की सापेक्ष बारंबारताएँ और संचयी बारंबारताएँ प्राप्त कीजिए ।

जीवनकाल (घंटों में) के आधार पर 250 लैम्प बल्बों का बंटन	
जीवनकाल (घंटों में)	बारंबारता
499·5 – 649·5	5
649·5 – 799·5	20
799·5 – 949·5	40
949·5 – 1099·5	81
1099·5 – 1249·5	57
1249·5 – 1399·5	34
1399·5 – 1549·5	13
कुल	250

1249·5 घंटों या उससे कम जीवनकाल वाले बल्बों की संख्या भी ज्ञात कीजिए । *3*

(ग) यादृच्छिक चर X के मान 0 और 1 होने की प्रायिकताएँ क्रमश: q और p हैं । n आमाप वाले प्रतिदर्श $X_1, X_2, ..., X_n$ को बंटन से लिया गया है । यदि $r = \sum_{i=1}^{n} X_i$, तो दिखाइए कि $\frac{r+1}{n+1}$, p का एक अभिनत आकलक है । यह भी दिखाइए कि $n \to \infty$ पर आकलक की अभिनति शून्य की ओर प्रवृत्त होती है । *4*

4. (क) निम्नलिखित प्रायिकता बंटन को लीजिए :

$X \to$ / $Y \downarrow$	-1	0	1
-1	–	$\frac{1}{6}$	–
0	$\frac{1}{6}$	–	$\frac{1}{3}$
1	–	$\frac{1}{3}$	–

r(X, Y) ज्ञात कीजिए । क्या X और Y स्वतंत्र हैं ? कारण दीजिए । *5*

(ख) मान लीजिए कि X और Y समान प्रायिकता घनत्व फलन $f(x) = \theta e^{-\theta x}$; $x \geq 0$ वाले स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं । Z = min (X, Y) का प्रायिकता घनत्व फलन ज्ञात कीजिए । *5*

5. (क) निराकरणीय परिकल्पना कि एक चरघातांकी समष्टि का माध्य $\theta = 10$ घंटे है, का परीक्षण विरुद्ध वैकल्पिक परिकल्पना कि $\theta \neq 10$ घंटे से करने के लिए एक ही प्रेक्षण का प्रयोग करना है । यदि निराकरणीय परिकल्पना तभी अस्वीकार करनी है जबकि प्रेक्षित मान 8 से कम या 12 से अधिक हो, तब

(i) प्रकार I त्रुटि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

(ii) प्रकार II त्रुटि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि $\theta = 2$ हो ।

(iii) इस परीक्षण का क्षमता फलन भी ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) यादृच्छिक चर Y का प्रत्याशा और प्रसरण परिकलित कीजिए जिसका प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित है : *6*

$$f(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & -1 < y < 1 \text{ के लिए} \\ 0, & \text{अन्यथा ।} \end{cases}$$

6. (क) एक द्विचर बारंबारता बंटन का माध्य (3, 4) है और सहसम्बन्ध गुणांक 0·4 है । Y की X पर समाश्रयण रेखा, रेखा $Y = X$ के समांतर है । दोनों समाश्रयण रेखाएँ ज्ञात कीजिए और जब $Y = 1$ हो, तो X का मान परिकलित कीजिए । *5*

(ख) एक यादृच्छिक चर X के मानों $-1, 1, 3, 5$ से संबद्ध प्रायिकताएँ क्रमश: $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ और $\frac{1}{2}$ हैं । $P(|X - 3| \geq 1)$ ज्ञात कीजिए । शेबीशेव असमिका का प्रयोग करके इस प्रायिकता का उपरिबंध भी ज्ञात कीजिए । *5*

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *10*

(क) किन्हीं दो घटनाओं A और B के लिए, $P(A \cup B)$, $P(A)$ या $P(B)$ से अधिक नहीं हो सकती ।

(ख) किसी भी स्वेच्छ मान A के सापेक्ष माध्य वर्ग विचलन अधिकतम होता है जबकि A माध्यिका हो ।

(ग) यदि $X_1, X_2, ..., X_n$, माध्य 0 और प्रसरण θ^2 वाली प्रसामान्य समष्टि से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, θ का एक अनभिनत आकलक होगा ।

(घ) यदि X, प्राचल α और β वाला बीटा बंटन है, तो $1 - X$, प्राचल $1 - \alpha$ और $1 - \beta$ वाला बीटा यादृच्छिक चर होगा ।

(ङ) यदि $Y \sim N(1, 4)$, तो $P(1 < Y < 10) \cong 0{\cdot}5$.