No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B. SC.)
Term-End Examination
June, 2024
PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Attempt all questions.*

(*ii*) *The marks for each question are indicated against it.*

(*iii*) *Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any *five* parts : 5×2=10

   (a) Define Covariant and Contravariant tensors of rank two. 2

   (b) Determine the eigen values of the matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Calculate the residue of the function :

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-2)(z-3)}$$

   at its poles.

(d) Show that the function $f(z) = e^z$ is analytic.

(e) Plot the Bessel functions of the first kind of order 0 and 1.

(f) Obtain the Laplace transform of the function cos *pt*.

(g) Obtain the Fourier cosine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \ , & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(h) Prove the orthogonality relation for the Legendre polynomials $P_1(x) = x$ and $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$.

2. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Determine the eigen values and eigen vectors of :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Diagonalize the matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) If ω be the imaginary cube root of unity, show that the set $\{1, \omega, \omega^2\}$ is a cyclic group of order 3 with respect to multiplication.

3. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Using Taylor series, expand $f(z) = \sin(z)$ about $z = \frac{\pi}{4}$.

(b) Calculate the value of the contour integral $\oint_C \frac{dz}{z^3(z+5)}$, where C is the circle $|z| = 2$.

(c) Using the method of residues, show that :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. (a) Obtain the sine transform of $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$. 5

(b) Obtain the inverse Laplace transform of the function $\ln\left(i + \frac{9}{s^2}\right)$. 5

Or

Using Laplace transform, solve the initial value problem :

$$y'' + y' - 2y = 4$$

given that $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$ 10

5. Attempt any *one* part :

(a) Using the generating relation for Legendre polynomials :

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x) t^n$$

obtain the recurrence relation : 10

$$(2x+1)x\,\mathrm{P}_n(x) = (n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x) + n\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

(b) Derive the Rodrigue's formula for Hermite polynomial. Show : 6+4

$$\mathrm{H}_4(x) = 16x^4 - 4x^2 + 2$$

PHE-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(*ii*) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(*iii*) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : $5\times2=10$

(क) कोटि 2 के सहपरिवर्ती और प्रतिपरिवर्ती टेन्सर को परिभाषित कीजिए।

(ख) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मान प्राप्त कीजिए :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(ग) अनंतकों पर फलन $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-2)(z-3)}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए।

(घ) सिद्ध कोजिए कि फलन $f(z)=e^z$ विश्लेषिक है।

(ङ) शून्य और प्रथम कोटियों वाल प्रथम प्रकार के बेसल फलनों के आलेख खींचिए।

(च) फलन $\cos pt$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(छ) फलन :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0\ , & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

का फूरिये कोसाइन रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(ज) लजन्ड्रे-बहुपदों $\mathrm{P}_1(x)=x$ और $\mathrm{P}_2(x)=\dfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$ के लिए लांबिकता संबंध सिद्ध कीजिए।

2. कोई **दो** भाग हल कीजिए : 2×5=10

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मान और आइगेन सदिश प्राप्त कीजिए :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

का विकर्णन कीजिए।

(ग) यदि $\omega, 1$ का अधिकल्पित घन मूल हो, तो दिखाइए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गुणन के अधीन कोटि 3 वाला एक चक्रीय समूह है।

3. कोई **दो** भाग हल कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) $z = \frac{\pi}{4}$ के प्रति टेलर श्रेणी का उपयोग कर $f(z) = \sin z$ का प्रसार कीजिए।

(ख) कंटूर समाकल :

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z+5)}$$

का मान परिकलित कीजिए, जहाँ C $|z| = 2$ वृत्त है।

(ग) अवशिष्ट-विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4. (क) फलन $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$ का साइन रूपांतरण प्रापत कीजिए। 5

(ख) फलन $\ln\left(i+\frac{9}{s^2}\right)$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए। 5

अथवा

लाप्लस रूपांतर का उपयोग कर, निम्नलिखित आदि मान समस्या

$$y''+y'-2y=4$$

दिया है : 10

$$y(0)=2,\ y'(0)=1$$

5. कोई **एक** भाग हल कीजिए : $1\times10=10$

(क) लजन्ड्र बहुपदों के जनक फलन : 10

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n$$

का उपयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त कीजिए :

$$(2x+1)x\,\mathrm{P}_n(x)=(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)+n\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

(ख) हर्मिट बहुपदों के रोड्रोगेज सूत्र को व्युत्पन्न कीजिए। सिद्ध कीजिए कि :

$$\mathrm{H}_4(x)=16x^4-4x^2+2$$

होता है। 6+4