

No. of Printed Pages : 14

MTE-14

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2024

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Attempt any **five** questions.*

(ii) *Use of calculators is not allowed.*

(iii) *Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Derive Poiseuille law using dimensional analysis. 3
- (b) There are two species A and B in a forest. A feeds on B. The increase in population of A is proportional to the population B while decrease in population of B is proportional to population of A. Set up the model equations describing this situation. 2
- (c) It is possible to project a particle with a given velocity v in two possible ways so as

P. T. O.

to make it pass through a point P at a distance r from the point of projection. Show that the product of the times taken to reach this point in two possible ways is proportional to ' r '. 5

2. (a) The modified logistic population model for a fish population including the effect of harvesting is given as follows :

$$\frac{dN}{dt} = N \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN$$

where N is the population of fishes at any time t , K and E are positive constants. Determine $N(t)$. Show that for $E \leq 1$, $N(t) \rightarrow K(1-E)$ as $t \rightarrow \infty$ and for $E > 1$, $N(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. 5

- (b) The demand function for a particular commodity is $y = 15e^{-x/3}$, $0 \leq x \leq 8$, where y is the price per unit and x is the number of units demanded. Determine the price and quantity for which the revenue is maximum. 5
3. (a) An insect population (denoted by y) is being destroyed by an insecticide at a constant rate d . It is increasing at a rate

proportional to the current population. The constant of proportionality is k . Which of the following initial-value problems might be reasonable model of this situation ? For each of the choices below, justify why you are rejecting or accepting it. 4

(i) $y' + ky = d, y(0) = y_0$

(ii) $y' - ky = d, y(0) = y_0$

(iii) $y' + ky = -d, y(0) = y_0$

(iv) $y' - ky = -d, y(0) = y_0$

- (b) Let x and y denote respectively the proportion of susceptibles and carriers in a population. Suppose the carriers are removed from the population at a rate β and disease spreads at a rate proportional to xy .

(i) Formulate the problem.

(ii) Determine y at any time t , given $y(0) = y_0$.

(iii) Find x at any time t subject to $x(0) = x_0$.

(iv) Find the limiting value of x as $t \rightarrow \infty$.

What does the limiting represent physically? 6

4. (a) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.25$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius is 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm². Then find the : 4
- (i) maximum peak velocity of blood and
(ii) the shear stress at the wall.
- (b) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of mean position then find the angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$ of the pendulum, where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4
- (c) A man weighs 50 kg. What will his weight be if the radius of the earth reduces to half its value ? 2
5. (a) Find the equilibrium price in a perfectly competitive market with the supply function $S(p) = \frac{2p^2 - 5}{3}$ and the demand function $D(p) = -4p + 7$. By the Walras criterion, is the price stable ? Give reasons for your answer. 4

- (b) The sale of a company from the year 2017-2022 are given below :

Year	Sale on lakhs of rupees
2017	40
2018	45
2019	50
2020	55
2021	60
2022	65

Fit a linear curve using the least square method. Hence find out the company's sale in 2023. 4

- (c) Write any *two* limitations of the Gaussian plume model. 2

6. (a) The heat emission rate associated with a stack gas is 4800 kJ/s. The wind and stack gas speeds are 5 m/s and 15 m/s, respectively, and the inside stack diameter

at the top is 2 m. Estimate the plume rise
by means of : 4

- (i) Carson and Moses formula
(ii) Holland formula

- (b) Suppose that the populations x and y satisfy the following equations :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

find out all the critical points of the system. Which critical point represents the possibility of co-existence of the two species ? Discuss the type and stability of that critical point. 6

7. (a) The returns on the securities of two companies x and y be as given below :

Event (j)	Chance $P_{1j} = P_{2j}$	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	1/4	6	7
2	1/2	13	8
3	1/4	18	11

Find the expected return of the portfolios P (0.7, 0.3) and Q (0.4, 0.6). What inference can you draw by comparing the returns of the portfolios P and Q ? 5

(b) A hole is drilled in the earth passing through the centre and a ball is dropped into it. 5

(i) Set up the model equations to describe the motion of the ball and solve it.

(ii) Deduce from your solution whether the ball will fall out of the hole on the other side or not.

MTE-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iii) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करते हुए पॉइजुइल के नियम को व्युत्पन्न कीजिए। 3

(ख) एक जंगल के दो प्रजातियाँ A और B हैं। A, B को खाता है। A की जनसंख्या में वृद्धि B की जनसंख्या के समानुपाती होती है जबकि B की जनसंख्या में कमी A की जनसंख्या के समानुपाती

होती है। इस स्थिति का वर्णन करने वाले निदर्शन समीकरण स्थापित कीजिए। 2

(ग) एक कण को दिए गए वेग v के साथ दो संभावित तरीकों से प्रक्षेपित करना संभव है ताकि यह प्रक्षेपण के बिंदु से r दूरी पर एक बिंदु P से गुजर सके। दिखाइए कि दो संभावित तरीके से इस बिंदु तक पहुँचने में लगने वाले समय का गुणनफल r के समानुपाती होता है। 5

2. (क) कटाई के प्रभाव मछली की आबादी के लिए संशोधित वृद्धिघात जनसंख्या निदर्श निम्नानुसार दिया गया :

$$\frac{dN}{dt} = N \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN$$

जहाँ N किसी भी समय t पर मछलियों की जनसंख्या है, K और E धनात्मक अचर हैं। $N(t)$ निर्धारित कीजिए। $E \leq 1$ के लिए दिखाइए कि :

$t \rightarrow \infty$ के लिए $N(t) \rightarrow K(1-E)$ जबकि, यदि $E > 1$, तो $t \rightarrow \infty$ होने पर $N(t) \rightarrow 0$ हैं। 5

(ख) मान लीजिए कि एक विशिष्ट वस्तु का माँग फलन :

$$y = 15e^{-x/3}, \quad 0 \leq x \leq 8,$$

है, जहाँ y प्रति इकाई कीमत और x इकाइयों की माँग संख्या है। वस्तु की कीमत और मात्रा ज्ञात कीजिए कि जिससे राजस्व अधिकतम हो। 5

3. (क) एक कीट आबादी (y द्वारा चिह्नित) एक कीटनाशक द्वारा निरंतर दर d पर नष्ट हो रही है। यह वर्तमान जनसंख्या के आनुपातिक दर से बढ़ रहा है। अनुपातिकता का स्थिरांक R है। निम्नलिखित में से कौन-सी प्रारंभिक मान समस्या इस स्थिति का एक उचित गणितीय निदर्शन हो सकती है ? नीचे दिये गये विकल्पों में से प्रत्येक के लिए, आप क्यों, स्वीकार या अस्वीकार कर रहे हैं, इसका कारण बताइए। 4

(i) $y' + ky = d, y(0) = y_0$

(ii) $y' - ky = d, y(0) = y_0$

(iii) $y' + ky = -d, y(0) = y_0$

(iv) $y' - ky = -d, y(0) = y_0$

(ख) मान लीजिए कि x और y जनसंख्या में सुग्राह्य (Susceptible) और वाहकों के अनुपात को दर्शाते हैं। मान लीजिए कि वाहक जनसंख्या से B दर पर हटा दिए जाते हैं और बीमारी xy के आनुपातिक दर से फैलती है। 6

- (i) समस्या का निरूपण कीजिए।
- (ii) किसी भी समय t के लिए y निर्धारित कीजिए, $y(0) = y_0$ दिया गया है।
- (iii) किसी भी समय t के लिए x का पता लगाइए, $x(0) = x_0$ दिया गया है।
- (iv) $t \rightarrow \infty$ के लिए x का सीमांत मान ज्ञात कीजिए। सीमांत मान शारीरिक रूप से क्या दर्शाता है ?

4. (क) रक्त-धमनी की श्यानता $\mu = 0.025$ पॉयज लीजिए। यदि धमनी की लंबाई 1.5 सेमी, त्रिज्या 8×10^{-3} सेमी. और $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm² हो, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 4

- (i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग और
- (ii) दीवार का अपरूपण प्रतिबल।

(ख) यदि l लम्बाई का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर α कोण पर दोलायमान होता है, तो लोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है।

4

(ग) एक आदमी का वजन 50 किलो है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या उसके मान की आधी हो जाए तो उसका भार क्या होगा ?

2

5. (क) पूर्ति फलन $S(p) = \frac{2p^2 - 5}{3}$ और माँग फलन

$D(p) = -4p + 7$ के साथ एक पूर्ण प्रतिस्पर्धी बाजार में संतुलन कीमत ज्ञात कीजिए। वालरस (Walras) की कसौटी के अनुसार, क्या कीमत स्थायी है ? अपने उत्तर क कारण बताइए।

4

(ख) वर्ष 2017-2022 से कंपनी की बिक्री नीचे दी गई है :

वर्ष	लाख रुपये में बिक्री
2017	40
2018	45
2019	50
2020	55
2021	60
2022	65

न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग करके एक रैखिक
वक्र ज्ञात कीजिए। अतः 2023 में कंपनी की
बिक्री का पता लगाइए। 4

(ग) गॉसियन प्लूम मॉडल की कोई दो सीमाएँ लिखिए।
2

6. (क) स्टैक गैस से जुड़ी ऊष्मा उत्सर्जन दर 4800 kJ/s
है। वायु और स्टैक गैस की गति क्रमशः 5 m/s
और 15 m/s है, और शीर्ष पर अंदर का स्टैक
व्यास 2 m है। निम्नलिखित के माध्यम से प्लम
वृद्धि का अनुमान लगाइए : 4

(i) कार्सन और मूसा सूत्र

(ii) हॉलैंड सूत्र

(ख) मान लीजिए कि जनसंख्या x और y निम्न
समीकरणों को संतुष्ट करते हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

समष्टि के सभी क्रांतिक बिंदुओं को प्राप्त कीजिए।
कौन-सा क्रांतिक बिंदु दो प्रजातियों के
सह-अस्तित्व की संभावना का प्रतिनिधित्व करता
है ? उस क्रांतिक बिन्दु के प्रकार और स्थायित्व
पर चर्चा कीजिए। 6

7. (क) दो प्रतिभूतियों x और y का प्रतिफल नीचे दिया गया है :

घटना (j)	संयोग $P_{1j} = P_{2j}$	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	1/4	6	7
2	1/2	13	8
3	1/4	18	11

निवेश सूची $P = (0.7, 0.3)$ और $Q = (0.4, 0.6)$ के प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए। निर्वश सूची P और Q के प्रतिफल की तुलना करके आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ? 5

(ख) पृथ्वी के केंद्र से गुजरने वाली एक छेद ड्रिल किया जाता है और एक गेंद डाली जाती है। 5

- (i) गेंद की गति का वर्णन करने और इसे हल करने के लिए गणितीय निदर्शन समीकरण स्थापित कीजिए।
- (ii) अपने हल से पता लगाइए कि गेंद छेद से दूसरी ओर गिरेगी या नहीं।