

No. of Printed Pages : 10

MTE-10

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2024

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Attempt any five questions.*

(ii) *All computations may be done upto 3 decimal places.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

(iv) *Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Using divided differences, show that the data :

x	$f(x)$
-3	18
-2	12
-1	8
1	6
2	8
3	12

P. T. O.

represents a second degree interpolating polynomial. Hence obtain the polynomial.

4

- (b) Find an interval of unit length which contains the negative real root of $f(x) = 8x^3 - x + 3 = 0$. Construct a fixed point iteration $x_{n+1} = g(x_n)$, which converges. Take the mid-point of this interval as a starting approximation and iterate once.

6

2. (a) A linear system of equations $Ax = b$, where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, k \neq \pm 1$$

is to be solved using Gauss-Jacobi iteration method. Find the condition on k so that the method converges.

5

- (b) The equation $f(x) = 18x^3 - 33x^2 + 2x + 5 = 0$ has 3 real roots. Find the intervals which contain these roots. Perform 2 iterations of the bisection method to obtain the negative real root.

5

3. (a) Using the step size $h = \frac{1}{2}$, find a polynomial that interpolates the function $f(x) = x - 9^{-x}$ in the interval $[0, 1]$.

4

- (b) A differentiation rule of the form :

$$f'(x_0) = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \quad (x_k = x_0 + kh)$$

is given. Find the values of α_0, α_1 and α_2 so that the rule is exact for all polynomials of degree less than or equal to 2. Also find the error term. 6

4. (a) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ using LU decomposition}$$

method. Take $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$. 5

- (b) The value of \sqrt{a} is being obtained using

$$\text{the iteration scheme } x_{n+1} = \frac{1}{g} x_n \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right).$$

Find the order of convergence of the method. 5

5. (a) Solve the system of equations :

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 17$$

by the Gauss-elimination method with partial pivoting. 5

(b) Evaluate $\int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}$ using Simpson's rule with $h=2$ and $h=1$. Improve that result using Romberg integration. 5

6. (a) The initial value problem $y' = t^2 + y$, $y(1) = 2$ is given, find $y(1.4)$ for two values of h i. e. $h = 0.2$ and $h = 0.1$, using the Euler's method and extrapolate the value of $y(1.4)$. 5

(b) Using Gerschgorin bounds, find the estimates of the eigenvalues of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Draw a rough sketch of the bounds. 5

7. (a) Given the following data, estimate the value of $f(9)$ using Lagrange's interpolation : 3

x	$f(x)$
1	-3
5	10
7	9
10	15

- (b) Perform *three* iterations of the Newton-Raphson method to approximate a root of the equation $f(x) = x^4 - x + 1 = 0$ starting with $x_0 = 0$. 3
- (c) Obtain the 8th Taylor's series expansion of the function $f(x) = \sin x$ in $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ about $x_0 = 0$. Obtain a bound for the error $R_9(x)$. 4

MTE-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) कोई पाँच प्रश्न हल कीजिए।

(ii) सभी गणनाएँ दशमलव के 3 स्थानों तक की जा सकती हैं।

(iii) कैल्कुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) विभाजित अंतरों का प्रयोग करके दिखाइए कि
आँकड़े

x	$f(x)$
-3	18
-2	12
-1	8
1	6
2	8
3	12

द्विघातीय अंतर्वेशी बहुपद को निरूपित करते हैं।

इस प्रकार वह बहुपद भी ज्ञात कीजिए। 4

(ख) इकाई लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए

जिसमें $f(x) = 8x^3 - x + 3 = 0$ का ऋणात्मक

वास्तविक मूल स्थित हो। एक नियत बिन्दु

पुनरावृत्ति $x_{n+1} = g(x_n)$ बनाइए जो अभिसरित

होती हो। इस अंतराल के मध्यबिन्दु को प्रारंभिक

सन्निकटन मानकर, एक बार पुनरावृत्ति कीजिए। 6

2. (क) एक रैखिक समीकरण निकाय $Ax = b$, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, k \neq \pm 1$$

है, को गाउस-जैकोबी पुनरावृत्ति विधि से हल

किया जाना है। k पर वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए

जिससे कि यह विधि अभिसरित होती हो। 5

(ख) समीकरण $f(x) = 18x^3 - 33x^2 + 2x + 5 = 0$ के

3 वास्तविक मूल हैं। वे अंतराल ज्ञात कीजिए

जिनमें ये मूल स्थित हैं। ऋणात्मक वास्तविक

मूल ज्ञात करने के लिए समद्विभाजन विधि की

2 पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 5

3. (क) पग $h = \frac{1}{2}$, लम्बाई $h = \frac{1}{2}$ लेकर, वह बहुपद ज्ञात कीजिए जो फलन $f(x) = x - 9^{-x}$ को अंतराल $[0,1]$ में अंतर्वेशित करता हो। 4

- (ख) $f'(x_0) = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, $(x_k = x_0 + kh)$ के रूप में एक अवकलन सूत्र दिया है। α_0, α_1 और α_2 के मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि यह सूत्र सभी घात 2 या कम वाले बहुपदों के लिए यथातथ हो। साथ ही त्रुटि पद भी ज्ञात कीजिए। 6

4. (क) LU वियोजन विधि से, आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। आप}$$

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1 \text{ ले सकते हैं।} \quad 5$$

- (ख) \sqrt{a} का मान पुनरावृत्ति विधि

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \text{ से ज्ञात किया जाना है। इस}$$

$$\text{विधि के अभिसरण की कोटि ज्ञात कीजिए।} \quad 5$$

5. (क) समीकरण निकाय :

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 17$$

को गाउस-निराकरण विधि से आंशिक कीलकन के साथ हल कीजिए। 5

(ख) सिम्पसन के नियम से $h=2$ और $h=1$ लेकर

$$\int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}$$
 का मान ज्ञात कीजिए। परिणाम को

रोम्बर्ग समाकल से परिशुद्ध कीजिए। 5

6. (क) आदिमान समस्या $y' = t^2 + y$, $y(1) = 2$ दी हुई है। h के दो मानों अर्थात् $h=0.2$ और $h=0.1$ के लिए ऑयलर विधि से $y(1.4)$ का मान ज्ञात कीजिए और बहिर्वेशन से $y(1.4)$ के मान में सुधार कीजिए। 5

(ख) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके, आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मानों का आकलन कीजिए। 5

7. (क) दिए गए निम्नलिखित आँकड़ों पर लैग्रांज अंतर्वेशन का प्रयोग करके $f(9)$ के मान का आकलन कीजिए :

x	$f(x)$
1	-3
5	10
7	9
10	15

- (ख) $x_0 = 0$ से प्रारम्भ करके, समीकरण $f(x) = x^4 - x + 1 = 0$ के एक मूल के सन्निकटन के लिए न्यूटन-रैफ़शन विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ दीजिए।

- (ग) $x_0 = 0$ के सापेक्ष $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ में फलन $f(x) = \sin x$ का 8वाँ टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। त्रुटि $R_9(x)$ हेतु बाउंड प्राप्त कीजिए।