No. of Printed Pages : 10 **MTE-09**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2024

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Q. No.* ***7*** *is compulsory. Answer any* ***four*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is not allowed.*

1. (a) Prove or disprove : 2

"The set of integers is a countable set."

(b) Test the convergence of the following series : 4

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)!}$

(c) Examine the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by : 4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 3x^2}{4x}, & \text{when } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3}, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

for continuity on **R**. If it is not continuous at point in **R**, find the nature of discontinuity there at.

2. (a) Examine the series given below for convergence : 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n + 5}{3n - 2} \right)^n$$

(b) Find the value of $k \in \mathbf{R}$ for which : 3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x - 1)(2x - 3)(3x - 2)}{3 - x + kx^3}$$

exists. Also find the limit.

(c) Find the upper and the lower Riemann integrals of the function f, defined on $[a, b]$ as follows : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is rational} \\ 2, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}.$$

Is f Riemann integrable on $[a, b]$? Justify your answer.

3. (a) Show that the equation : 3

$$2x^3 + 3x^2 - 2x + 15 = 0$$

has a root in the interval [–3, –2].

(b) Prove that $8^n - 3^n$ is divisible by 5, for all $n \in \mathbf{N}$ using principle of induction. 3

(c) Examine the function $f(x) = (x+2)^3 (1-x)^2$ for extreme values. 4

4. (a) Check whether the following sets are closed : 2

(i) The set $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$

(ii) The set of rational numbers $\mathbf{Q}$.

(b) Show that on the curve, $y = 4x^2 - 7x + 2$, the chord joining the points whose abscisae are $x = 2$ and $x = 3$, is parallel to the tangent at the point whose abscissa is $x = \frac{5}{2}$. 4

(c) Show that the sequence $\{f_n\}$ of functions, where $f_n(x) = \frac{2n}{x+3n}$, is uniformly convergent in [0, 2]. 4

5. (a) Using the sequential definition of continuity prove that the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defined by $f(x) = 3x - 5$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$ is continuous. 2

(b) Use Cauchy's root rest to examine the convergence or divergence of the series : 4

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots+\infty$$

(c) Let $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ be a function defined by $f(x)=1+x^2$. Let $P_1=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right\}$ and $P_2=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ be two partitions of the interval, [0, 1]. Calculate U (P_1, f) and $L(P_2, f)$. 4

6. (a) Define a Cauchy sequence. Show that the following sequence (a_n) is Cauchy, where the following : 3

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}.$$

(b) What are the sufficient conditions for a set to have a limit point ? Check whether the following sets have any limit points. 3

(i) The set of even numbers between 10 and 10,000.

(ii)]–2, 5[

(c) Let $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[0,2]$ be a function defined by $f(x)=1+\sin x$. Check whether f^{-1} is a invertible or not. If so, show that f^{-1} is a continuous function using inverse function theorem. 4

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give proper reasons for your answers : 5×2=10

(i) –1 is a limit point of the interval]–2, 1[.

(ii) Product of two discontinuous functions can never be continuous.

(iii) The series :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots\infty$$

is divergent.

(iv) The function, $f(x)=\left|3+x^2\right|$ is not differentiable in [1, 3].

(v) The necessary condition for a function f to be integebrable is that it is continuous.

MTE–09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. सं. 7* ***अनिवार्य*** *है। प्र. सं. 1 से 6 में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

1. (क) सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 2

"पूर्णांक समुच्चय एक गणनीय समुच्चय है।"

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)!}$

(ग) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3x^2}{4x}, & \text{जब } x \neq 0 \text{ है} \\ \dfrac{1}{3}, & \text{जब } x = 0 \text{ है} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ की $\mathbf{R}$ पर सांतत्य की जाँच कीजिए। यदि यह $\mathbf{R}$ के किसी बिंदु पर संतत नहीं है तो उस बिंदु पर इसके सांतत्य की प्रकृति ज्ञात कीजिए। 4

2. (क) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-2} \right)^n$$

(ख) $k \in \mathbf{R}$ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-1)(2x-3)(3x-2)}{3-x+kx^3}$ का अस्तित्व हो। साथ ही, यह सीमा भी ज्ञात कीजिए। 3

(ग) $[a, b]$ पर निम्न प्रकार परिभाषित फलन f के उपरि और निम्न रीमान समाकल ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ 2, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

क्या f, $[a, b]$ पर रीमान समाकलनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

3. (क) दिखाइए कि समीकरण : 3

$$2x^3 + 3x^2 - 2x + 15 = 0$$

का अंतराल [–3, –2] में एक मूल है।

(ख) आगमन के सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि $8^n - 3^n$ सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए 5 से विभाज्य है। 3

(ग) फलन $f(x) = (x+2)^3 (1-x)^2$ के चरम मानों की जाँच कीजिए। 4

4. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय संवृत हैं या नहीं : 2

(i) समुच्चय $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$

(ii) परिमेय संख्याओं का समुच्यय, Q

(ख) दिखाइए कि वक्र $y = 4x^2 - 7x + 2$, पर भुजों $x = 2$ और $x = 3$ वाले बिंदुओं को मिलाने वालो जीवा, भुज $x = \frac{5}{2}$ वाले बिंदु पर स्पर्श रेखा के समांतर है। 4

(ग) दिखाइए कि फलन अनुक्रम $\{f_n\}$, [0, 2] में एकसमानतः अभिसारी है, जहाँ $f_n(x) = \frac{2n}{x + 3n}$ है। 4

5. (क) सांतत्य की अनुक्रमी परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 3x - 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ संतत है। 2

(ख) श्रेणी : 4

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots+\infty$$

के अभिसरण या अपसरण की जाँच के लिए कॉशी मूल परीक्षण का प्रयोग कीजिए।

(ग) मान लीजिए कि $f[0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित एक फलन है। मान लीजिए $P_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ और $P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ अंतराल [0, 1] के दो विभाजन हैं। $U(P_1, f)$ और $L(P_2, f)$ ज्ञात कीजिए। 4

6. (क) कॉशी अनुक्रम की परिभाषा दीजिए। दिखाइए कि अनुक्रम (a_n) कॉशी है, जहाँ : 3

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$$

(ख) एक समुच्चय का सीमा बिंदु होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध क्या हैं ? जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चयों के सीमा बिंदु हैं या नहीं : 3

(i) 10 और 10000 के बीच की सम संख्याओं का सुमच्चय

(ii)]–2, 5[

(ग) मान लीजिए : 4

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[0,2]$$

एक फलन है जो $f(x)=1+\sin x$ द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है या नहीं। यदि है, तो व्युत्क्रम फलन प्रमेय का प्रयोग करके दिखाइए कि f^{-1} एक संतत फलन है।

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तरों के उचित कारण दीजिए : 5×2=10

(i) –1 अंतराल] –2, 1[का एक सीमा बिंदु ह।

(ii) दो असंतत फलनों का गुणनफल कभी भी संतत नहीं हो सकता।

(iii) श्रेणी $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots\infty$ अपसारी है।

(iv) फलन $f(x)=\left|3+x^2\right|$, [1, 3] में अवकलनीय है।

(v) एक फलन f के समाकलनीय होने के लिए एक आवश्यक प्रतिबंध यह है कि f संतत हो।