

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2024**

**MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Time : 2 Hours*

*Maximum Marks : 50*

- 
- Note :** (i) *Question No. 1 is compulsory.*  
(ii) *Answer any **four** questions from the remaining Question Nos. 2 to 7.*  
(iii) *Use of calculator is not allowed.*  
(v) *Symbols have their usual meanings.*
- 
- 

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example :

$$2 \times 5 = 10$$

- (i)  $y = \tan(x + c)$  is a solution of the differential equation  $y' = 1 + y^2$ .

- (ii) The differential equation :

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

is elliptic for  $x \neq 0, y \neq 0$ .

(iii) The differential equation :

$$(1 + ye^{xy}) dx + (2y + xe^{xy}) dy = 0$$

is exact.

(iv) The partial differential equation :

$$x^2 uu_x + y^2 uu_y = xy$$

is a first order quasi-linear partial differential equation.

(v) The characteristic roots of the ordinary differential equation

$$y''' + y' = 0 \text{ are } 0, \pm i.$$

2. (a) Solve the PDE : 5

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6y \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 y^4.$$

(b) Use the method of variation of parameters to find the general solution of the differential equation : 5

$$y'' + a^2 y = \cos ax.$$

3. (a) Use the method of undetermined coefficients to find general solution of the differential equation : 3

$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

- (b) Find an integrating factor and solve the differential equation : 4

$$(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xydy = 0 .$$

- (c) Solve the differential equation : 3

$$(2x + 3y - 4) dx - (4x + y - 3) dy = 0$$

4. (a) Solve the differential equation : 3

$$y = 2px + p^4x^2$$

- (b) Solve the differential equation : 4

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 20y = (x + 1)^2$$

- (c) Form a partial differential equation from :

3

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1 .$$

5. (a) Find the integral curves of the differential equation : 3

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} .$$

- (b) Find the complete integral of the partial differential equation : 4

$$y^2p - xyq = x(z - 2y)$$

- (c) Solve the partial differential equation : 3

$$(D^2 - DD' - 6 D'^2) z = xy$$

6. (a) Solve the Laplace equation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$   
in the rectangle with  $u(0, y) = 0$ ,  
 $u(a, y) = 0$ ,  $u(x, b) = 0$  and  $u(x, 0) = f(x)$ .

7

- (b) Find the general solution of the following  
differential equation :

3

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-x}$$

7. (a) Find the solution of the equation :

5

$$xu_x + yu_y = xe^{-u}$$

with  $u = 0$  on  $y = x^2$ .

- (b) Verify that the differential equation is  
integrable and find its integral using the  
method of Pfaffian differential equations :

5

$$yz^2(x^2 - yz) dx + zx^2(y^2 - xz) dy \\ + xy^2(z^2 - xy) dz = 0.$$

**MTE-08****स्नातक उपाधि कार्यक्रम****( बी. डी. पी. )****सत्रांत परीक्षा****जून, 2024****एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण**

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

**नोट :** (i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।  
संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए :  $2 \times 5 = 10$

(i) अवकल समीकरण  $y' = 1 + y^2$  का एक हल  $y = \tan(x + c)$  है।

(ii) अवकल समीकरण :

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

$x \neq 0, y \neq 0$  के लिए, दीर्घवृत्त है।

(iii) अवकल समीकरण :

$$(1 + ye^{xy}) dx + (2y + xe^{xy}) dy = 0$$

यथातथ है।

(iv) आंशिक अवकल समीकरण :

$$x^2uu_x + y^2uu_y = xy$$

एक प्रथम कोटि रैखिककल्प अवकल समीकरण है।

(v) साधारण अवकल समीकरण :

$$y''' + y' = 0$$

के अभिलक्षणिक मूल  $0, \pm i$  हैं।

2. (क) आंशिक अवकल समीकरण : 5

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6y \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 y^4$$

को हल कीजिए।

(ख) प्रचल विचरण विधि का प्रयोग करके अवकल समीकरण : 5

$$y'' + a^2 y = \cos ax$$

को हल कीजिए।

3. (क) अनिर्धारित गुणांक विधि का प्रयोग करके अवकल समीकरण : 3

$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(ख) अवकल समीकरण : 4

$$(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xydy = 0$$

के एक समाकलन गुणक ज्ञात कीजिये और हल कीजिए।

(ग) अवकल समीकरण : 3

$$(2x + 3y - 4) dx - (4x + y - 3) dy = 0$$

को हल कीजिए।

4. (क) अवकल समीकरण : 3

$$y = 2px + p^4x^2$$

को हल कीजिए।

(ख) अवकल समीकरण : 4

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 20y = (x + 1)^2$$

को हल कीजिए।

(ग)  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1$  से एक आंशिक अवकल समीकरण बनाइए। 3

5. (क) अवकल समीकरण : 3

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

(ख) अवकल समीकरण : 4

$$y^2p - xyq = x(z - 2y)$$

का सम्पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

(ग) आंशिक अवकल समीकरण : 3

$$(D^2 - DD' - 6 D'^2) z = xy$$

को हल कीजिए।

6. (क) आयत  $u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, b) = 0$   
और  $u(x, 0) = f(x)$  में लाप्लास समीकरण :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

को हल कीजिए। 7

(ख) अवकल समीकरण : 3

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

7. (क) समीकरण : 5

$$xu_x + yu_y = xe^{-u}$$

का हल ज्ञात कीजिए जहाँ  $y = x^2$  पर  $u = 0$  है।

(ख) सत्यापित कीजिए कि अवकल समीकरण : 5

$$yz^2(x^2 - yz) dx + zx^2(y^2 - xz) dy \\ + xy^2(z^2 - xy) dz = 0$$

समाकलनीय है। फौफियन (Pfaffian) अवकल समीकरणों को हल करने की विधि से इसका समाकल ज्ञात कीजिए।