No. of Printed Pages : 8

# MTE–07

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

## June, 2024

### MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

*Time : 2 Hours* *Maximum Marks : 50*

---

***Note :*** *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

*(ii) Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining question nos.* ***2*** *to* ***7****.*

*(iii) Use of calculator is not allowed.*

---

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

   (a) The domain of the function $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ is $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$.

   (b) If $z = \sin^{-1} \dfrac{x}{y}, y \neq 0$, then :

   $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

(c) The Jacobian of the functions :

$$u = 2x - 3y, v = 5x + 7y$$

is 28.

(d) $S = \left\{1 + \frac{2}{x} \mid 0 < x < 1\right\}$ is bounded below.

(e) The area of $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$ is $e - 1$.

2. (a) Find the product and quotient of the following pairs of functions $f$ and $g$, where : 4

$$f(x, y) = \sin x + \cos y$$

and $$g(x, y) = \frac{\sin x}{y}, y \neq 0$$

State their domains in each case.

(b) Evaluate the following : 2×3=6

(i) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - \cos 5x - 5x}{5x^2}$$

(ii) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

3. (a) Show that : 4

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

(b) Show that the function $x^2 + x + xy$ is differentiable at $(0, 0)$. 4

(c) Describe the level curves of the function : 2

$$f(x, y) = 36 - x^2 - y^2 .$$

4. (a) Find the minimum value of $x^2 + 2y^2$ subject to the condition $x + 3y = 11$ using Lagrange's method of multipliers. 6

(b) Find the area of the region D in $\mathbf{R}^2$ bounded by the parabolas $y = 5 - x^2$ and $y = x^2 + 3$. 4

5. (a) Evaluate the integral : 5

$$\iiint_W \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \, dy \, dz ,$$

where W is the region bounded by the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(b) Find the centre of gravity of a thin plate of density $\delta$, bounded by $y = x^2$ and $y = x$ in the first quadrant. 5

6. (a) If (a) $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, \sin z)$, $g(x, y, z) = (x + z, y^2, z^2 + 1)$ and $F = f \circ g$, verify that : 6

$$J_F(1, 1, 1) = J_f(3, 1, 2) \, O \, J_g(1, 1, 1) .$$

(b) Find the second Taylor polynomial of the function $f(x, y) = \cos(3x + 5y)$ at the point $(0, 0)$. 4

7. (a) Find $\frac{du}{dt}$, if $u(x, y) = x^2 + xy + 3y$, $x = t + 3$, $y = 6 + t^2$. 3

(b) Use Green's theorem to evaluate : 5

$$\int_C (x^3 + 2y)\,dx + (4x - 3y^2)\,dy,$$

where C is the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(c) Locate the stationary points of $f(x, y) = xy$. 2

# MTE–07

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी. डी. पी. )

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2024

## एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

---

**नोट :** *(i) प्रश्न सं. **1 अनिवार्य** है।*

*(ii) प्रश्न सं. **2** से **7** तक किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

*(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

   (क) फलन $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ का प्रांत $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$ है।

   (ख) यदि $z = \sin^{-1} \dfrac{x}{y}, y \neq 0$, तब

   $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(ग) निम्नलिखित रूपांतरण का जैकोबियन 28 है :

$$u = 2x - 3y, v = 5x + 7y$$

(घ) $S = \left\{1 + \frac{2}{x} \mid 0 < x < 1\right\}$ नीचे से परिबद्ध है।

(ङ) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq e^x\}$ का क्षेत्रफल $e - 1$ है।

2. (क) निम्नलिखित फलनयुग्म $f$ एवं $g$ का गुणनफल और भागफल ज्ञात कीजिए और प्रत्येक का प्रांत बताइए : 4

$$f(x, y) = \sin x + \cos y$$

एवं $$g(x, y) = \frac{\sin x}{y}, y \neq 0$$

(ख) निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए : 2×3=6

(i) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - \cos 5x - 5x}{5x^2}$$

(ii) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

3. (क) दिखाइए कि : 4

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

(ख) दिखाइए कि फलन $x^2 + x + xy$, $(0, 0)$ पर अवकलनीय है। 4

(ग) फलन $f(x, y) = 36 - x^2 - y^2$ के स्तर वक्रों का वर्णन कीजिए। 2

4. (क) लैग्रांज गुणक विधि से प्रतिबंध $x + 3y = 11$ के अधीन $x^2 + 2y^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 6

(ख) $\mathbf{R}^2$ में, परवलय $y = 5 - x^2$ और $y = x^2 + 3$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल मालूम कीजिए। 4

5. (क) समाकल $\iiint_W \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy\, dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ W गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश है। 5

(ख) प्रथम चतुर्थांश में $y = x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध, घनत्व $\delta$ वाली पतली प्लेट का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) यदि $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, \sin z)$, $g(x, y, z) = (x + z, y^2, z^2 + 1)$ और $F = f \circ g$ जब जाँच कीजिए कि : 6

$$J_F(1, 1, 1) = J_f(3, 1, 2)\, O\, J_g(1, 1, 1)$$

(ख) बिन्दु $(0, 0)$ पर $f(x, y) = \cos(3x + 5y)$ द्वारा परिभषित फलन $f$ का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

7. (क) $\frac{du}{dx}$ जाँच कीजिए, जब
$u(x, y) = x^2 + xy + 3y$, $x = t + 3$,
$y = 6 + t^2$ 3

(ख) ग्रीन प्रमेय लागू करके : 5

$$\int_C (x^3 + 2y)\, dx + (4x - 3y^2)\, dy$$

का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ C दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

(ग) $f(x, y) = xy$ के स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए। 2