

**BACHELOR DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2024

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) Attempt **five** questions in all.

(ii) Question No. 7 is **compulsory**.

(iii) Answer any **four** questions from Q. Nos. 1 to 6.

(iv) Use of calculator is not allowed.

1. (a) If $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and

$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, find the operation table for

$X = \{p, q, r, s\}$ with respect to matrix multiplication. Is this operation commutative on X ? Is X a group ? Justify your answer. 5

- (b) Define a zero divisor in a ring. Check whether $\bar{4}$ is a zero divisor in \mathbb{Z}_{36} . 2
- (c) Define a Sylow- p subgroup of a finite group G . Find the orders of Sylow- p subgroups of a group of order 30. 3
2. (a) Define a prime ideal in a ring. Check whether $9z$ is a prime ideal in \mathbb{Z} . 2
- (b) Define a relation R on \mathbb{Z} by aRb if a divides b or b divides a check whether R is reflexive, symmetric and transitive. 3
- (c) Write $\sigma = (2,4,3,1)(512)$ as a product of transpositions as well as product of disjoint cycles. Also find σ^{-1} . 5
3. (a) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ be a ring homomorphism. Define the kernel of f . Show that f is injective iff the kernel of f is (0) . 3
- (b) Define the commutator subgroup of a group G . Show that the commutator subgroup of an abelian group G is $\{e\}$, where e is the identity element of G . 2
- (c) Show that $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ is not a VFD by giving two distinct factorisations of 8 into irreducible elements of $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. 5

4. (a) If a, b are elements of a ring R when do we say that a is an associate of b ? Check whether $1 + i$ and $1 - i$ are associates in $\mathbf{Z}[i]$. 2

- (b) Let :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Check that G is a group under matrix multiplication. 4

- (c) Define the nilradical of a ring R . Find the nilradical of \mathbf{Z}_{45} . What is the the nilradical of an integral domain? 4
5. (a) If H and K are subgroups of a group G , give a necessary and sufficient condition for HK to be a subgroup h . Show that if H is a normal subgroup of G , HK is a subgroup of G . 3
- (b) If I and J are ideals in a ring R , show that $I + J$, IJ and $I \cap J$ are ideal of R . If $I = (6)$ and $J = (14)$ are ideals of \mathbf{Z} find $I + J$. 7
6. (a) Define the group of inner automorphisms of a group G . If I is the group of inner automorphisms of G and Z is the centre of G , show that G/Z is isomorphic to I . 4

- (b) Define a Principal Ideal Domain (PID).
Show that $\mathbf{Z}[x]$ is not a PID. 6
7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter example. 10
- (i) If H is a normal subgroup of G , $[G : H] = 2$.
- (ii) If every element of a group has finite order, the group has finite order.
- (iii) \mathbf{Z}_9 is a field.
- (iv) Every relation is a reflexive relation.
- (v) The polynomial ring $\mathbf{Z}_2[x]$ is infinite.

MTE-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न सं. 7 करना जरूरी है।

(iii) प्रश्न क्र. 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) यदि

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

और $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ है, तो आव्यूह गुणन के सापेक्ष

$$X = \{p, q, r, s\}$$

का संक्रिया तालिका बनाइए। क्या यह संक्रिया X पर क्रमविनिमेय है ? क्या X एक समूह है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5

(ख) एक वलय में शून्य भाजक को परिभाषित कीजिए।

जाँच कीजिए कि $4, \mathbf{Z}_{36}$ में शून्य भाजक है या नहीं। 2

(ग) एक परिमित समूह का सीलो- p उपसमूह परिभाषित

कीजिए। कोटि 30 वाले परिमित सीलो- p उपसमूहों की कोटि ज्ञात कीजिए। 3

2. (क) एक वलय में अभाज्य गुणजावली परिभाषित

कीजिए। जाँच कीजिए कि $9 \mathbf{Z}$ एक अभाज्य गुणजावली है या नहीं। 2

(ख) \mathbf{Z} पर संबंध R, aRb यदि a, b से विभाजित हो

तो या $b a$ से विभाजित होता है, द्वारा परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि R एक स्वतुल्य, सममित एवं संक्रामक संबंध है। 3

(ग) क्रमचय $\sigma = (2\ 4\ 3\ 1)(5\ 1\ 2)$ को पक्षान्तरण क

गुणनफल के रूप में एवं असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए भी ज्ञात कीजिए। 5

3. (क) मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ एक वलय समाकारिता है न कि अष्टि परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि f तभी और केवल तभी एकैकी होता जब f की अष्टि शून्य हो। 3

(ख) एक समूह के क्रमविनिमयक उपसमूह को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि एक आबेली समूह का क्रमविनिमयक उपसमूह $\{e\}$ है, जहाँ e समूह G का तत्समक आव्यूह है। 2

(ग) $\mathbf{Z}[\sqrt{-7}]$ में 8 का अखण्डनीय अवयवों के दो अलग-अलग गुणनखंडन देकर सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{Z}[\sqrt{-7}]$ UFD नहीं है। 5

4. (क) यदि a, b एक वलय \mathbf{R} के अवयव हं, तो हम कब कहते हैं कि a और b सहचारी हैं ? जाँच कीजिए कि $1+i$ और $1-i, \mathbf{Z}[i]$ में सहचारी हैं ? 2

(ख) मान लीजिए कि :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}$$

जाँच कीजिए कि G आव्यूह गुणन के सापेक्ष समूह है या नहीं। 4

- (ग) एक वलय R का शून्यकारण परिभाषित कीजिए। Z_{45} का शून्य करण ज्ञात कीजिए। एक पूर्णाकीय प्रान्त का शून्यकरणी क्या है ? 4
5. (क) यदि H और R एक समूह G के उपसमूह हं, तो HK को समूह G का उपसमूह होने के लिए एक पर्याप्त और अनिवार्य प्रतिबंध दीजिए। दिखाइए कि यदि H समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है तो HK समूह G का उपसमूह होगा। 3
- (ख) यदि I और J वलय R के गुणजावलियाँ हैं तो दिखाइए कि $I + J$, $I \cap J$ और $I \cap J$ वलय R के गुणजावलियाँ हैं। यदि $I = (b)$ और $J = (14)$ वलय Z का गुणजावलियाँ हैं, तो $I + J$ ज्ञात कीजिए। 7
6. (क) एक समूह G का आंतर स्वाकारिताओं के समूह परिभाषित कीजिए। यदि I समूह G के अंतर स्वाकारिताओं के समूह हं और Z समूह G का केन्द्र है, तो दिखाइए कि G/Z समूह I के तुल्यकारी है। 4
- (ख) एक मुख्य गुणजावली प्रान्त (PID) परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि $Z[x]$ एक PID नहीं है। 6

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की एक लघु उपपत्ति या प्रति उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए। 10

(i) यदि H समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है, तो $[G : H] = 2$ ।

(ii) यदि एक समूह के सभी अवयव परिमित कोटि का है, तो G परिमित कोटि का है।

(iii) Z_9 एक क्षेत्र है।

(iv) प्रत्येक संबंध स्वतुल्य होता है।

(v) बहुपद वलय $Z_2(x)$ अनंत है।