No. of Printed Pages : 16 **MTE-04/MTE-05**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2024

(Elective Course : Mathematics)

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

&

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 50*

***Instructions* :**

1. *Students registered for both MTE-04 & MTE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.*

2. *Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

MTE-04/MTE-05

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

एवं

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-04 और एम.टी.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

2. जो छात्र एम.टी.ई.-04 या एम.टी.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

MTE-04

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

June, 2024

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

Time : $1\frac{1}{2}$ Hours *Maximum Marks : 25*

Note : *Question No. **5** is compulsory. Answer any **three** questions from Questions No. **1** to **4**. Use of calculator is not allowed.*

---

1. (a) Let $1, \omega, \omega^2$ be the cube roots of unity. Evaluate : $2\frac{1}{2}$

$$\prod_{t=1}^{5}\left(1-\omega^{t}\right)$$

(b) Let A and B be subsets of a universal set X. Show that :

$A \Delta B = \{x \in X |$ x belongs to exactly one of A and B$\}$, where Δ is the symmetric difference between A and B. $2\frac{1}{2}$

2. (a) Prove that : 3

$$\begin{vmatrix} b+c-a-d & bc-ad & bc(a+d)-ad(b+c) \\ c+a-b-d & ca-bd & ca(b+d)-bd(a+b) \\ a+b-c-d & ab-cd & ab(c+d)-cd(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= -2(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$$

(b) Using Tchebychev's inequality show that : 2

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}+........+\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \le (2n-1)^{1/4}$$

3. (a) The cost of a ticket to a certain musical concert is ₹ 30 for children and ₹ 55 for adults. On a certain day, attendance at the concert is 2200 and total revenue is ₹ 75,000. How many children and how many adults bought tickets ? $2\frac{1}{2}$

(b) If a, b, c are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, find the value of $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$. $2\frac{1}{2}$

4. (a) Solve the following system of equations by Gauss elimination method : $2\frac{1}{2}$

$$2xy + y + z = 9$$

$$-x - y + z = 1$$

$$3x - y + z = 9$$

(b) Find those $z \in \mathbf{C}$ for which $z^2 + 3 = (4 + i)$. $2\frac{1}{2}$

5. Which of the following statements are true and which are false. Give a short proof or a counter-example to justify your answer, whichever is appropriate. 5×2=10

(a) If $P(x)$ is a real polynomial of degree n, then it has exactly n real roots.

(b) If $Z \in C$ such that $|Z| = 1$, then for any natural number m,

$$z^m + z^{-m} = 2\cos m\theta \text{ and}$$

$$z^m - z^{-m} = 2\sin m\theta$$

(c) If sum of two roots of $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, $p, q, r, s \in \mathbf{R}$, equals the sum of other two roots, then $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

(d) If $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, then $ax + by + cz < 1$, where x, y, z, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

(e) If $f(x)$ and $g(x)$ are two polynomials, then deg $\left(f(x).g(x)\right) \geq \deg f(x) + \deg g(x)$.

MTE-04

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे *अधिकतम अंक : 25*

नोट : *प्रश्न सं.* ***5*** *करना जरूरी है। प्रश्न सं.* ***1*** *से* ***4*** *तक से कोई* ***तीन*** *प्रश्न हल कीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) मान लीजिए कि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं। $\prod_{t=1}^{5}\left(1-\omega^t\right)$ का मान निकालिए। $2\frac{1}{2}$

(ख) मान लीजिए कि A और B एक समष्टीय समुच्चय X के उपसमुचय हैं। दर्शाइए कि :

$A \Delta B = \{x \in X \mid x$ यथार्थतः A और B में से एक सदस्य है$\}$

है, जहाँ Δ समुच्चयों A और B के बीच सममित अन्तर है। $2\frac{1}{2}$

2. (क) सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{vmatrix} b+c-a-d & bc-ad & bc(a+d)-ad(b+c) \\ c+a-b-d & ca-bd & ca(b+d)-bd(a+b) \\ a+b-c-d & ab-cd & ab(c+d)-cd(a+b) \end{vmatrix}$$

$$=-2(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$$

(ख) चेबचेव असमिका के उपयोग से, दर्शाइए कि : 2

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}+........+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\leq(2n-1)^{1/4}$$

होता है।

3. (क) किसी संगीत के कार्यक्रम में बच्चों का एक टिकट ₹ 30 का है तथा वयस्कों के लिए एक टिकट ₹ 55 का है। एक दिन उस कार्यक्रम में कुल उपस्थिति 2200 थी तथा कुल प्राप्त राजस्व ₹ 75,000 था। कितने बच्चों ने और कितने वयस्कों ने टिकट खरीदे ? $2\frac{1}{2}$

(ख) यदि a,b और c समीकरण $x^3+qx+r=0$ के मूल हैं, तो $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$ का मान ज्ञात कीजिए। $2\frac{1}{2}$

4. (क) गाउसीय विलोपन विधि के उपयोग से निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल कीजिए : $2\frac{1}{2}$

$$2xy + y + z = 9$$
$$-x - y + z = 1$$
$$3x - y + z = 9$$

(ख) वे $z \in \mathbf{C}$ ज्ञात कीजिए जिनके लिए $z^2 + 3 = (4 + i)$ है। $2\frac{1}{2}$

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं तथा कौन-से कथन असत्य हैं ? उचित प्रकार से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5×2=10

(क) यदि $\mathrm{P}(x)$ घात n का एक वास्तविक बहुपद है, तो उसके यथार्थतः n वास्तविक मूल होते हैं।

(ख) यदि $z \in \mathbf{C}$ इस प्रकार है कि $|z| = 1$ है, तो किसी भी प्राकृत संख्या m के लिए,

$$z^m + z^{-m} = 2\cos m\theta$$

और $$z^m - z^{-m} = 2\sin m\theta$$

होता है।

(ग) यदि

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0\,; p, q, r, s \in \mathbf{R}$$

के दो मूलों का योग अन्य दोनों मूलों के योग के बराबर है, तो $p^3 - 4pq + 8r = 0$ होता है।

(घ) यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ है, तो $ax + by + cz < 1$ होता है; जहाँ x, y, z, $a, b, c \in \mathbf{R}$ है।

(ङ) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो बहुपद हैं, तो $(f(x).g(x)) \geq \deg f(x) + \deg g(x)$ है।

MTE-05

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

June, 2024

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : $1\frac{1}{2}$ Hours *Maximum Marks : 25*

Note : *Question No.* ***5*** *is compulsory. Answer any* ***three*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***4****. Use of calculator is not allowed.*

---

1. (a) Find the equation of the plane which passes through the points (1, 0, 1), (2, 1, –1) and (0, 1, 0). 3

(b) Find the equation of the right circular cone whose vertex in (1, –1, 2), the axis is $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$ and the semi-vertical angle is 45°. 2

2. (a) Show that if $ux+vy+wz=p$ is a tangent plane to the paraboloid $ax^2+by^2=2z$, then $\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+2pw=0$. 3

(b) Find the locus of the point whose distance from the point (0, 2) is 5 times its distance from the line $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$. 2

3. (a) Reduce the equation :

$$17\left(x^2+y^2\right)+30xy+14\sqrt{2x}+18\sqrt{2y}+2=0$$

to standard form. Hence, identify the object it represents. 3

(b) Find the angle between the planes $2x-3y+z=1$ and $x-y+z=4$. 2

4. (a) Find the cone on which the perpendiculars drawn from the origin to the tangent planes to the cone $19x^2+11y^2+6yz=0$ lie.

3

(b) Find the equation of a line perpendicular to the line $2y+x+1=0$ and passing through $(2,-1)$. 2

5. Which of the following statements are true and which are false ?

Give reason for your answers. 10

(i) The eccentricity of the conic $2x^2 + 3y^2 = 1$ is greater than 1.

(ii) All planar sections of a hyperboloid are hyperbolas.

(iii) The polar equation $r^2\left(9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta\right) = 36$ resresents an ellipse.

(iv) The line $\frac{x}{2} = y = z$ lies in the plane $\frac{x}{2} + y + z = 0$.

(v) $2x^2 - y^2 - z^2 = xy$ has only one set of mutually perpendicular generators.

MTE-05

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे *अधिकतम अंक : 25*

नोट : *प्रश्न सं.* ***5*** *करना अनिवार्य है। प्रश्न सं.* ***1*** *से* ***4*** *तक किन्हीं* ***तीन*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(1,0,1),(2,1,-1)$ और $(0,1,0)$ से गुजरता है। 3

   (ख) उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(1,-1,2)$ पर स्थित है, अक्ष $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$ है और अर्ध-शीर्ष कोण $45°$ है। 2

2. (क) दिखाइए कि यदि $ux+vy+wz=p$ परवलयज $ax^2+by^2=2z$ को स्पर्श करता है, तो : 3

$$\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+2pw=0$$

(ख) उस बिन्दु का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु $(0,2)$ से दूरी, उसकी रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ से दूरी का 5 गुना है। 2

3. (क) समीकरण

$$17\left(x^2+y^2\right)+30xy+14\sqrt{2x}+18\sqrt{2y}+2=0$$

को मानक रूप मं समानीत कीजिए। इस प्रकार, इसके द्वारा निरूपित आकृति को पहचानिए। 3

(ख) समतलों $2x-3y+z=1$ और $x-y+z=4$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 2

4. (क) वह शुंक ज्ञात कीजिए जिस पर मूलबिन्दु से शंकु $19x^2+11y^2+6yz=0$ के स्पर्श तलों पर डाले गए लम्ब स्थित हैं। 3

(ख) रेखा $2y+x+1=0$ पर उस लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $(2,-1)$ से गुजरती है। 2

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं कौन से असत्य हैं ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए। 10

(i) शांकव $2x^2 + 3y^2 = 1$ की उत्केंद्रता 1 से बड़ी है।

(ii) एक अतिपरवलयज के सभी समतल परिच्छेद अतिपरवलय होते हैं।

(iii) ध्रुवीय समीकरण $r^2\left(9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta\right) = 36$ एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है।

(iv) रेखा $\frac{x}{2} = y = z$ समतल $\frac{x}{2} + y + z = 0$ में स्थित है।

(v) $2x^2 - y^2 - z^2 = xy$ के परस्पर लंब जनकों का केवल एक समुच्चय है।