No. of Printed Pages : 11 **MTE–02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2024

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) There are **seven** questions in this paper.*

*(ii) Question No. **7** is **compulsory**.*

*(iii) Do any **four** questions from questions **1** to Q. No. **6**.*

*(iv) Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) Define a skew-hermitian matrix and give an example. 2

(b) Check whether the vectors (1, –1, 1); (1, 1, 0) and (2, 1, 3) are linearly independent. 3

(c) If the matrix of a linear transformation $\mathrm{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the ordered basis {(1, 1), (1, 0)} is :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

find the linear transformation **T**. 3

(d) Check whether the matrix :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfies the polynomial equation $(x-2)^2 = 0$. 2

2. (a) Check that the vector :

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

is an eigenvector for the matrix :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

find the corresponding eigenvalue. 2

(b) Find the signatures of the forms $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ and $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(c) Let :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 3b & 2 \end{bmatrix}$$

and $$C = \begin{bmatrix} -11 & -8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}.$$

Are there values a, b such that AB = C ? If 'Yes', find the values. If 'No', justify your answer. 3

(d) Check whether $x^3 + x$ is in the linear span of $\{x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + x\}$ in the vector space of polynomials with rational coefficients. 2

3. (a) Check whether or not the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$. If A is not diagonalisable, find the adjoint of A. 6

(b) Consider the linear operator $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ defined by :

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - iz_2 + z_3, iz_1 + 2z_2, z_1 + z_3)$$

Find T*. Is T self adjoint ? Justify your answer. 4

4. (a) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rule :

$$x + y + z = 3$$

$$2x + y - z = 4$$

$$x + 3y + 2z = 2$$

If 'yes', solve the system of equations using Cramer's rule. If 'No'. solve the system of equations using Gaussian elimination. 5

(b) Find a basis dual to the basis {(1, 1, 1), (1, –1, 0), (1, 1, 0)} of $\mathbf{R}^3$. 5

5. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the form $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 6yz$ and its principal axes. 7

(b) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, –2, 1), (1, 1, 0) and (1, –1, 1). Also check whether $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lies on it. 3

6. (a) Show that the set S of all 2 × 2 upper triangular matrices with entries from **R** form a vector space over **R** under usual addition an scalar multiplication of matrices. Find a basis of this vector space.

8

(b) Check whether the map $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ defined by T $((x, y)) = (-y, x)$ is a linear operator. 2

7. Which of the following statements are true and which false ? Justify your answer with short proof or a counter example, whichever is appropriate.

(a) If V is a vector space, W_1 and W_2 are subspaces of V, then $W_1 \cup W_2$ is a vector space. 2

(b) If A is an $n \times m$ matrix and B is an $n \times m$ matrix then AB^t and BA^t have the same rank. 2

(c) If V is a vector space of dimension four over **R**, there is a linear operator $T : V \to V$ with characteristics polynomial $(x - 1)(x - 2)(x-3)^2$ and minimal polynomial $(x - 1)\ (x-2)^2(x-3)$. 2

(d) If $A \in M_n(\mathbf{R})$ is diagonalisable, then A is a symmetric matrix. 2

(e) The function $\bullet : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \bullet\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$ is an inner product on $\mathbf{R}^2$. 2

MTE–02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) इस प्रश्न पत्र में 7 प्रश्न है।*

(ii) प्रश्न 7 करना ***अनिवार्य*** *है।*

(iii) प्रश्न 1 से प्रश्न 6 तक कोई ***चार*** *प्रश्न हल कीजिए।*

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक विषम हर्मिटि आव्यूह परिभाषित कीजिए और उदाहरण दीजिए। 2

(ख) जाँच कीजिए कि सदिश (1, –1, 1); (1, 1, 0) और (2, 1, 3) रैखिकतः स्वतंत्र हैं। 3

(ग) क्रमित आधार $\{(1, 1), (1, 0)\}$ के सापेक्ष यदि एक रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

है, तो रूपांतरण T ज्ञात कीजिए। 3

(घ) जाँच कीजिए कि आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

बहुपद समीकरण $(x-2)^2 = 0$ को संतुष्ट करता है या नहीं। 2

2. (क) जाँच कीजिए कि सदिश :

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ के लिये आइगेन सदिश है। संगत आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए। 2

(ख) समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ और $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ के चिह्नक निकालिये। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) मान लीजिए कि :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 3b & 2 \end{bmatrix}$$

और $$C = \begin{bmatrix} -11 & -8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

क्या a, b के ऐसे मान हैं जिसके लिये AB = C ? यदि 'हाँ' तो मान ज्ञात कीजिए। यदि 'ना' तो अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(घ) जाँच कीजिए कि $x^3 + x$ परिमेय संख्या गुणक वाले बहुपदों की सदिश समष्टि में $\{x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + x\}$ की रैखिक विस्तृति में है। 2

3. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है या नहीं। यदि विकर्णनीय है तो एक आव्यूह P और एक विकर्ण आव्यूह D निकालिये जिस के लिये $P^{-1}AP = D$ यदि A विकर्णनीय नहीं है तो A का सहखंडज निकालिये। 6

(ख) रैखिक संकारक $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ लीजिए जो :

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - iz_2 + z_3, iz_1 + 2z_2, z_1 + z_3)$$

द्वारा परिभाषित है। T* ज्ञात कीजिए। क्या T स्व-संलग्न है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

4. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय क्रेमर नियम से हल किया जा सकता ह या नहीं :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

यदि 'हाँ' तो समीकरण निकाय को क्रेमर विधि से हल कीजिए। यदि 'ना' तो समीकरण निकाय को गौसीय निराकरण से हल कीजिए। 5

(ख) $\mathbf{R}^3$ के आधार $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 0)\}$ की द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 5

5. (क) समघात $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 6yz$ का लाम्बिक विहित समानयन और मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए। 7

(ख) बिन्दुओं $(1, -2, 1)$, $(1, 1, 0)$ और $(1, -1, 1)$ द्वारा निर्धारित समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ उस समतल पर स्थित है या नहीं। 3

6. (क) दिखाइये कि वास्तविक प्रविष्टियों वाले 2×2 उपरि त्रिभुजीय आव्यूहों का समुच्चय S, $\mathbf{R}$ पर एक सदिश समष्टि है। इस सदिश समष्टि का एक आधार निकालिये। 8

(ख) जाँच कीजिए कि फलन $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ जो $T((x, y)) = (-y, x)$ द्वारा परिभाषित है, एक रैखिक संकारक है या नहीं। 2

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा दीजिए, जो भी उचित है :

(क) यदि V एक सदिश समष्टि है और $\mathbf{W}_1$ और $\mathbf{W}_2$ V की उप-समष्टियाँ है, तो $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ भी एक सदिश समष्टि है। 2

(ख) यदि A एक $n \times m$ आव्यूह और B एक $n \times m$ आव्यूह है तो AB^t और BA^t की जाति समान है। 2

(ग) यदि V, $\mathbf{R}$ एक विमा चार वाली एक सदिश समष्टि है, एक रैखिक संकारक $T : V \to V$ होता है जिसका अभिलाक्षणिक बहुपद $(x-1)(x-2)(x-3)^2$ है और न्यूनतम बहुपद $(x-1)(x-2)^2(x-3)$ है। 2

(घ) यदि $A \in M_n(\mathbf{R})$ विकर्णनीय है, तो A एक सममित आव्यूह है। 2

(ङ) फलन $\bullet : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \bullet((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 - 2y_1 y_2$, $\mathbf{R}^2$ पर एक आंतर गुणनफलन है। 2