

No. of Printed Pages : 9

MTE-01

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2024

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **four** questions from
Question Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answers with a short proof or a counter-example : 10

(i) $\frac{d}{dx} \left[\int_2^{e^{-x}} \ln t \, dt \right] = xe^{-x} - \ln 2.$

(ii) If the functions f and g are defined on \mathbf{R} by $f(x) = 3(2 - x)$ and $g(x) = 2|1 - x|$, then $(g \circ f)(5) = 10.$

P. T. O.

- (iii) The curve $y = \frac{3-4x}{2+3x^2}$ has an asymptote parallel to the axis of x .
- (iv) If p is a critical point of the function f , then f is derivable at the point p .
- (v) The function f defined by $f(x) = |3-x|$ is differentiable in the interval $[0, 2]$.
2. (a) Let $f : \mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$ be a function defined by
- $$f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}. \text{ Find a } \delta > 0 \text{ such that}$$
- $$|f(x) - 7| < \frac{1}{12} \text{ for } 0 < |x - 2| < \delta. \text{ Hence, find}$$
- $$\lim_{x \rightarrow 2} f(x). \quad 4$$
- (b) Connect $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^n x \, dx$ ($n > 1$) with I_{n-2} . Hence, deduce the value of I_4 . 6
3. (a) Evaluate : 4

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2(x^2+4)}$$

- (b) Differentiate $\cos^{-1} x$ w.r.t. $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 3

- (c) A river is 70 m wide. Its depth ' d ' (in m) at a distance x m from one of its banks is given by the following table :

x	d
0	0
10	3
20	6
30	8
40	11
50	13
60	10
70	2

Find the area of the cross-section by the Trapezoidal rule. 3

4. Trace the curve $y^2 = x^2(x+4)$ by stating all the properties used to trace it. 10
5. (a) Find the maximum possible domain of the function f defined by : 2

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{2x}}$$

- (b) By considering the function f given by $f(x) = (x-3) \ln x$ in $[1, 3]$, show that the equation $x(1 + \ln x) = 3$ is satisfied by at least one value of x lying in $]1, 3[$. 3

- (c) Find the approximate value of $(0.998)^{7/2}$ taking the first three terms of Maclaurin's series for $(1-x)^{7/2}$. 5

6. (a) Evaluate : 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/2} - 1}{x^{1/5} - 1}$$

- (b) Find the upper and the lower integrals for the function f , defined by $f(x) = |3x - 2|$ in the interval $[2, 4]$. Hence conclude, whether f is integrable over $[2, 4]$ or not. 4
- (c) Find the volume of the solid generated by revolving the curve $y(x^2 + 4) = 8$, about its asymptote. 4

7. (a) Check whether $f(x) = e^{-2x}$ is always decreasing or not. 2

- (b) The cost of fuel in running an engine is proportional to the square of the speed in km/h and it is ₹ 75 per hour when the speed is 15 km/h. Other costs amount to ₹ 300 per hour. Find the speed, which will minimize the cost. 4

- (c) Find all the points of discontinuity of the function f given by : 4

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x; & x \leq 2 \\ x - 2; & 2 < x \leq 3 \\ 2x - 3; & x > 3 \end{cases}$$

also draw its graph.

MTE-01

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्र. सं. 1 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक कोई चार प्रश्न कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 10

(i) $\frac{d}{dx} \left[\int_2^{e^{-x}} \ln t dt \right] = xe^{-x} - \ln 2$ ।

(ii) यदि फलन f और g , \mathbf{R} पर $f(x) = 3(2-x)$ और $g(x) = 2|1-x|$, द्वारा परिभाषित हैं, तो $(g \circ f)(5) = 10$ ।

(iii) वक्र $y = \frac{3-4x}{2+3x^2}$ की एक अनंतस्पर्शी x -अक्ष के समानांतर है।

(iv) यदि p , फलन f का एक क्रांतिक बिंदु है, तो बिंदु p पर f अवकलनीय है।

(v) $f(x) = |3-x|$ द्वारा परिभाषित फलन f अंतराल $[0, 2]$ पर अवकलनीय है।

2. (क) मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$ एक फलन है

जो $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$ द्वारा परिभाषित है। एक

ऐसा $\delta > 0$ ज्ञात कीजिए कि $0 < |x - 2| < \delta$ के लिए $|f(x) - 7| < \frac{1}{12}$ है। $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ज्ञात कीजिए।

4

(ख) $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^n x \, dx$ ($n > 1$) का I_{n-2} के साथ

संबंध स्थापित कीजिए। इस प्रकार I_n का मान निकालिए।

6

3. (क) $\int \frac{dx}{(x-3)^2(x^2+4)}$ ज्ञात कीजिए।

4

(ख) $\cos^{-1} x$ का $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ के सापेक्ष अवकलन

कीजिए।

3

(ग) एक नदी 20 मी. चौड़ी है। इसके एक किनारे से x मी. दूर पर इसकी गहराई ' d ' (मी. में) निम्नलिखित तालिका में दी गयी है :

x	d
0	0
10	3
20	6
30	8
40	11
50	13
60	10
70	2

समलंब नियम द्वारा अनुच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

4. वक्र $y^2 = x^2(x+4)$ का अनुरेखण कीजिए और अनुरेखण में प्रयोग किये जाने वाले गुणधर्मों को लिखिए। 10

5. (क) $f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{2x}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का अधिकतम संभावित प्रांत ज्ञात कीजिए। 2

- (ख) $f(x) = (x - 3) \ln x$ द्वारा अंतराल $[1, 3]$ में परिभाषित फलन लीजिए। दर्शाइए कि समीकरण $(1 + \ln x) = 3$, अंतराल $]1, 3[$ में स्थित कम से कम एक मान x के लिए संतुष्ट होती है। 3
- (ग) $(1-x)^{7/2}$ के लिए मैक्लारिन श्रेणी के तीन पहले पदों का प्रयोग करके $(0.998)^{7/2}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5
6. (क) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/2} - 1}{x^{1/5} - 1}$ ज्ञात कीजिए। 2
- (ख) $f(x) = |3x - 2|$ द्वारा अंतराल $[2, 4]$ में परिभाषित फलन f के लिए उपरि और निम्न समाकलन ज्ञात कीजिए। इस प्रकार निष्कर्ष निकालिए कि f , $[2, 4]$ पर समाकलनीय है या नहीं। 4
- (ग) वक्र $y(x^2 + 4) = 8$ को इसकी अनंतस्पर्शी के परितः घुमाने से बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। 4
7. (क) जाँच कीजिए कि $f(x) = e^{-2x}$ हमेशा ह्रासमान है या नहीं। 2

(ख) एक इंजन को चलाने में लगे ईंधन की लागत इसकी चाल के वर्ग के समानुपाती है और यह लागत ₹ 75 प्रति घंटा है जबकि चाल 15 km/h है। अन्य लागत ₹ 300 प्रति घंटा है। वह चाल ज्ञात कीजिए। जबकि लागत न्यूनतम होगी। 4

(ग) $f(x) = \begin{cases} 2-x; & x \leq 2 \\ x-2; & 2 < x \leq 3 \\ 2x-3; & x > 3 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन

f के असतत् होने वाले सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।
इसका ग्राफ भी खींचिए। 4