No. of Printed Pages : 15 **BMTE-144**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/ BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2024

BMTE-144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(*ii*) *Do any* ***eight*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***10****.*

(iii) Use of non-programmable scientific calculator is allowed.

---

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter- example in support of your answer :

2×10=20

(i) The equation $x^3 - 4x - 16 = 0$ has a root in the interval [3, 4].

(ii) The order of convergence of the secant method is 0.62.

(iii) $\mu = E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}$.

(iv) For the system of linear equations :

$$5x + y + 2z = 34$$
$$4y - 3z = 12$$
$$10x - 2y + z = -4$$

the matrix is diagonally dominant.

(v) If h is the step length, then $(\Delta - \nabla)x^2$ is equal to $2h$.

(vi) $x = 1$ is a fixed point for the function $f(x) = \sqrt{x+1}$.

(vii) The numerical method :

$$y_{n+1} = \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right) y_n, \ \lambda > 0, \ n \geq 0$$

is relatively stable.

(viii) The composite trapezoidal rule for evaluation of the integral $\int_a^b f(x)\, dx$ requires the interval $[a, b]$ to be divided into any number of subintervals of equal width.

(ix) The method :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{9}{8x_n}$$

converges to 1.5 for any choice of initial approximation.

(x) The error of any quantity is given as the absolute value of the difference between the true value and approximate value of the quantity.

2. (a) Using Newton-Raphson method, find an iterative formula to compute the reciprocal of a natural number N. 5

(b) Calculate the nth divided difference of $\frac{1}{x}$, on the nodal points $x_0, x_1, ..., x_n$. 5

3. (a) Find the inverse of the matrix : 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

using LU decomposition method with $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$.

(b) Use secant method to determine the root of the equation $\cos x - x e^x = 0$. Take the initial approximation as $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ and perform two iterations of the method. 5

4. (a) Using the data sin (0.1) = 0.09983 and sin (0.2) = 0.19867, find an approximate value of sin (0.15) by Lagrange's interpolation. Also obtain a bound on the truncation error. 5

(b) Use the Euler's method to solve numerically the initial value problem : 5

$$y' = -2xy^2, \quad y(0) = 1$$

with $h = 0.2$ on the interval [0, 1].

5. (a) Using Runge-Kutta fourth order method with $h = 0.1$, find an approximate value of $y(0.1)$ for the initial value problem : 5

$$y' = xy + y^2, \quad y(0) = 1.$$

(b) Evaluate the integral :

$$\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x)\, dx$$

using composite trapezoidal rule with $h = 0.2$, compare with the exact value. 5

6. (a) Given the data :

$$f(3) = 168,$$

$$f(7) = 120$$

and $$f(9) = 72$$

If $f(k)$ is estimated as 138 using the Newton's form of the interpolating polynomial, then find the value of k. 5

(b) Solve the system of equations : 5

$$x + 2y + z = 3$$

$$3x - 2y - 4z = -2$$

$$2x + 3y - z = -6$$

using Gauss-Elimination method.

7. (a) Using synthetic division method, check whether $\alpha = 3$ is a root of the polynomial equation : 4

$$x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 = 0$$

(b) Find the first term of the series whose second and subsequent terms are 8, 3, 0, – 1, 0 using difference table. 6

8. (a) Estimate the eigen values of the matrix : 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

using the Gerschgorin bounds. Also, draw the rough sketch of the region in which the eigen values lie.

(b) If : 4

$$f(x) = e^{ax},$$

show that :

$$\Delta^n f(x) = (e^{ah} - 1)^n e^{ax}$$

9. (a) From the following data, calculate the population in the year 1985 : 5

Year	**Population (in '000)**
1971	12
1981	15
1991	20
2001	27
2011	49

(b) Using the third order Taylor's series method, find the solution of the initial value problem : 5

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1$$

at $x = 0.1$ taking $h = 0.1$.

10. (a) How many terms n be chosen in Maclaurin's expansion for e^x with an error less than 10^{-5}, $-1 \le x \le 1$? 5

(b) Find one root of the equation : 5

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

in the interval [2, 3] using Birge-Vieta method. Perform only one iteration.

BMTE-144

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)
(बी. एस. सी. जी./ बी. ए. जी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2024

बी.एम.टी.ई.-144 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न संख्या **2** से **10** तक किन्हीं **8** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) अप्रोग्रामीय वैज्ञानिक कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति है।

1. निम्नलिखित में से कौन–से कथन सत्य हैं और कौन–से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि के लिए एक लघु उपपत्ति या प्रतिउदाहरण दोजिए : 2×10=20

(i) समीकरण $x^3 - 4x - 16 = 0$ का अन्तराल [3, 4] में एक मूल है।

(ii) छेदक विधि के अभिसरण की कोटि 0.62 है।

(iii) $\mu = E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}$

(iv) रैखिक समीकरण निकाय :

$$5x + y + 2z = 34$$
$$4y - 3z = 12$$
$$10x - 2y + z = -4$$

का आव्यूह विकर्णतः प्रमुख है।

(v) यदि h पग लम्बाई है, तो $(\Delta - \nabla)x^2$ का मान $2h$ है।

(vi) $x = 1$ फलन $f(x) = \sqrt{x+1}$ का एक नियत बिन्दु है।

(vii) संख्यात्मक विधि :

$$y_{n+1} = \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right) y_n, \ \lambda > 0, \ n \geq 0$$

सापेक्षतः स्थायी है।

(viii) संयुक्त समलंबी नियम से समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ का मान ज्ञात करने के लिए अन्तराल $[a, b]$ को समान लम्बाई वाले कितने भी उप–अन्तरालों में विभाजित किया जा सकता है।

(ix) विधि $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{9}{8x_n}$, किसी भी प्रारम्भिक सन्निकट के लिए 1.5 पर अभिसरित होती है।

(x) किसी राशि की त्रुटि उस राशि के शुद्ध मान और सन्निकटित मान के अन्तर के निरपेक्ष मान द्वारा दी जाती है।

2. (अ) न्यूटन-रैफ्सन विधि का प्रयोग करके, किसी प्राकृतिक संख्या N का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए एक पुनरावृत्ति सूत्र दीजिए। 5

(ब) स्पन्द बिन्दुओं $x_0, x_1, ..., x_n$ पर $\frac{1}{x}$ का nवाँ विभाजित अन्तर परिकलित कीजिए। 5

3. (अ) $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ के साथ LU वियोजन विधि से आव्यूह : 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(ब) छेदक विधि से समीकरण $\cos x - x e^x = 0$ का एक मूल ज्ञात कीजिए। प्रारम्भिक सन्निकटन $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ लीजिए और इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 5

4. (अ) आँकड़ों sin (0.1) = 0.09983 और sin (0.2) = 0.19867 पर लग्रांज अंतर्वेशन लगाकर sin (0.15) का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। साथ ही रुंडन त्रुटि पर एक परिबंध भी प्राप्त कीजिए। 5

(ब) अंतराल [0, 1] पर h = 0.2 लेकर ऑयलर विधि से आदिमान समस्या : 5

$$y' = -2xy^2, \ y(0) = 1$$

को संख्यात्मक रूप से हल कीजिए।

5. (अ) h = 0.1 के साथ रुंगे-कुट्टा चतुर्थ कोटि विधि से आदिमान समस्या : 5

$$y' = xy + y^2, \ y(0) = 1$$

के लिए $y(0.1)$ का एक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

(ब) $h = 0.2$ लेकर संयुक्त समलंबी नियम से समाकल : 5

$$\int_{0.2}^{1.4} (\sin x - \log_e x + e^x)\, dx$$

का मान ज्ञात कीजिए और इसकी तुलना सत्य मान से कीजिए।

6. (अ) आँकड़ों :

$$f(3) = 168,$$
$$f(7) = 120$$

और $f(9) = 72$

के दिए होने पर यदि अंतर्वेशी बहुपद के न्यूटन रूप से $f(x)$ का आकलित मान 138 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ब) समीकरण निकाय : 5

$$x + 2y + z = 3$$
$$3x - 2y - 4z = -2$$
$$2x + 3y - z = -6$$

को गाउस-निराकरण विधि से हल कीजिए।

7. (अ) सांश्लेषिक विभाजन विधि का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि $\alpha = 3$ बहुपद समीकरण 4

$$x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 = 0$$

का मूल है या नहीं।

(ब) एक अंतर सारणी का प्रयोग करके उस श्रेणी का प्रथम पद ज्ञात कीजिए जिसके द्वितीय और आगे के पद 8, 3, 0, – 1, 0 हैं। 6

8. (अ) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके आव्यूह : 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

के आइगन मान आकलित कीजिए। साथ ही उस क्षेत्र का एक स्थूल आरेख दीजिए जिसमें आइगन मान स्थित हैं।

(ब) यदि : 4

$$f(x) = e^{ax}$$

है, तो दिखाइए :

$$\Delta^n f(x) = (e^{ah} - 1)^n e^{ax}$$

9. (अ) निम्नलिखित आँकड़ों से वर्ष 1985 में जनसंख्या ज्ञात कीजिए : 5

वर्ष	**जनसंख्या (हजारों में)**
1971	12
1981	15
1991	20
2001	27
2011	49

(ब) $h = 0.1$ लेकर तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि से $x = 0.1$ पर आदिमान समस्या : 5

$$y' = x - y, \ y(0) = 1$$

का हल ज्ञात कीजिए।

10. (अ) $e^x, -1 \leq x \leq 1$ के मैक्लॉरिन प्रसार में कितने पद n होने चाहिए ताकि त्रुटि 10^{-5} से कम रहे ? 5

(ब) बिरजे-वीटा विधि के प्रयोग से अंतराल [2, 3] में समीकरण :

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

का एक मूल ज्ञात कीजिए। केवल एक ही पुनरावृत्ति दीजिए। 5