No. of Printed Pages : 16 **BMTE–141**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) (BSCG)

Term-End Examination

June, 2024

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The **eighth** question is compulsory.*

(*iii*) *Do any **six** questions from Question one to question seven.*

(*iv*) *Calculators are not allowed.*

---

1. (a) Define a symmetric matrix and give an example. 2

(b) Complete the set S = {(1, 1, 0)} to a basis $\mathbf{R}^3$. 3

(c) Determine the equation of the plane spanned by the vectors (1, 0, 1) and (1, 1, –1). 3

(d) If the matrix of a linear transformation with respect to the standard basis is $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ find the linear transformation. 3

(e) Check whether the vector (1, 0, 2) is an eigenvector for the linear transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ defined by $T(x, y, z) = (x + 2z, 2x - z, 4x + y + 3z)$. Find the corresponding eigenvalue. 2

(f) Check whether the matrix :

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfies the polynomial equation $(x-2)^2 = 0$. 2

2. (a) Define the coset of a vector space. If $W = \{(x, y) \mid x - 3y = 0\}$ is a subspace of $\mathbf{R}^2$, describe the coset $(0, 2) + W$. 3

(b) Let $B = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\}$ and $B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. Find $M_B^{B'}$. 7

(c) Let V_1 be the subspace of M_n (**C**) of all $n \times n$ hermitian matrices and let V_2 be the subspace of M_n (**C**) of all $n \times n$ skew hermitian matrices. Show that $M_n(\mathbf{C}) = V_1 + V_2$. Check whether $M_n(\mathbf{C}) = V_2 \oplus V_2$. 5

3. (a) Obtain an orthogonal basis for $\mathbf{C}^3$ by applying the Gram-Schmidt orthogonal process to $\{(i, 1, 1), (i, 0, 2), (0, i, 0)\}$. 7

(b) Check whether or not the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1} AP = D$. If A is not diagonalisable, find adjugate of A. 6

(c) Let B = $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$ with $\alpha_1 = (1,1,-1), \alpha_2 = (1,1,0)$ and $\alpha_3 = (1,0,0)$. Write the vector $v = (a, b, c)$ as a linear combination of the basis vectors from B. 2

4. (a) Check whether

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

forms a subspace of $M_2(\mathbf{R})$. Is

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbf{R}, a > 0, c > 0 \right\}$$

a subspace of W_1 ? Justify your answer. 4

(b) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rule :

$$x + y - z = 2$$

$$x + 3y + z = 6$$

$$x - 2y + z = 1$$

If 'Yes', solve the system of equations using Cramer's rule. If 'No', solve the system of equations using Gaussian Elimination. 5

(c) Find the conditions on b_1, b_2 and b_3 for which the following set of equations is consistent : 6

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = b_1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_3$$

5. (a) Consider the linear operator T : $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ defined by :

$$T(z_1, z_2, z_3) = z_1 + (1+i)\, z_2 + iz_3,$$

$$(1-i)z_1 + 2z_2, -iz_1 + z_3)$$

Find T*. Is T self adjoint ? Justify your answer. 4

(b) Let T : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by T $(x, y) = (x, y, x + 2y)$ and S : $R^3 \to R^2$ be defined by S $(x, y) = (x + y, y + z)$. Suppose that B_1 and B_2 are the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$. Check that $[T \text{ o } S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} [S]_{B_1}^{B_2}$. 8

(c) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, – 2, 1), (1, 0, 1) and (1, –1, 1). Also check whether (1, 1, 1) lies on it. 3

6. (a) Let $R^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. Show that $\mathbf{R}^+$ is a real vector space with respect to $\oplus$ and $\odot$, defined by $a \oplus b = ab$ and $\alpha \odot a = a^{\alpha} \forall a, b \in \mathbf{R}^+, \alpha \in \mathbf{R}$. 6

(b) Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, using the Cayley-Hamilton theorem. 5

(c) State the Cauchy-Schwarz inequality for inner product spaces. Verify the inequality for the vectors $(i, 1, 0)$ and $(1, 0, i)$. 2

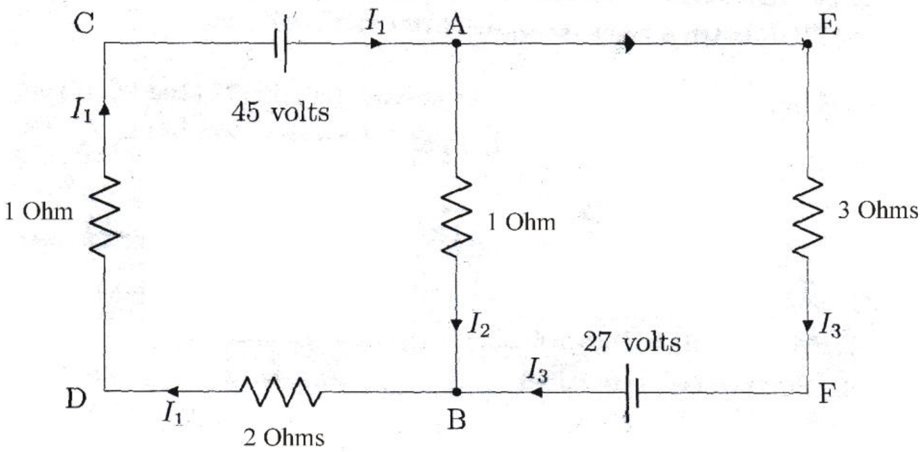
(d) Let A be a 3 × 4 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply on the left, will perform the following row operations on A : 2

(i) $R_2 \to 3R_2$

(ii) $R_3 \to R_3 - 4R_2$

7. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the form $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6xy - 6yz$ and its principal axes. 8

(b) Find the current flow in each branch of the following circuit : 7



8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with short proof or a counter example, whichever is appropriate : 10

(a) If V is a vector space, W_1 and W_2 are subspaces of V, then $W_1 \cup W_2$ is a vector space.

(b) For any real value of θ, the matrix $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ is invertible.

(c) There is no 3 × 3 matrix for which the minimal polynomial is x^2.

(d) If for $u \in v$ $(u, v) = 0$ for all $v \in \mathrm{V}$, V an inner product space, then u = 0.

(e) The nullity of the transformation $\mathrm{T} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, defined by

$$\mathrm{T}\left(x, y, z\right) = x + 2y + z$$

is 2.

BMTE–141

विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी.एस.सी.जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे अधिकतम अंक : 100

नोट : *(i) इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

*(ii) **आठवाँ** प्रश्न करना अनिवार्य है।*

*(iii) प्रश्न संख्या 1 से 7 तक कोई भी **छः** प्रश्न कीजिए।*

(iv) कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक सममित आव्यूह परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण दीजिए। 2

(ख) समुच्चय $S = \{(1,1,0)\}$ को पूरा करके $\mathbf{R}^3$ एक आधार बनाइए। 3

(ग) सदिश $(1, 0, 1)$ तथा $(1, 1, -1)$ द्वारा विस्तृत समतल के समीकरण का निर्धारण कीजिए। 3

(घ) यदि मानक आधार के सापेक्ष एक रैखिक रूपान्तरण का आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो रैखिक रूपान्तरण निकालिए। 3

(ङ) जाँच कीजिए कि $(1,0,2)$, $\mathrm{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\mathrm{T}(x, y, z) = (x + 2z, 2x - z, 4x + y + 3z)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपान्तरण के लिए एक आइगेन सदिश है। संगत आइगेमान भी निकालिए। 2

(च) जाँच कीजिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ बहुपद समीकरण $(x-2)^2 = 0$ को संतुष्ट करता है या नहीं। 2

2. (क) एक सदिश समष्टि का सह समुच्चय परिभाषित कीजिए। यदि $\mathrm{W} = \{(x, y) \mid x - 3y = 0\} \mathbf{R}^2$ का उपसमष्टि है, तो सह समुच्चय $(0, 2) + \mathrm{W}$ का वर्णन कीजिए। 3

(ख) मान लीजिए $\mathrm{B} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\}$ और $\mathrm{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. $\mathrm{M}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'}$ ज्ञात कीजिए। 7

(ग) मान लीजिए V_1, M_n ($\mathbf{C}$) का सभी $n \times n$ हर्मिटीय आव्यूहों का उपसमुच्चय है और V_2 सभी विषम-हमिटीय आव्यूह का उपसमुच्चय है। दिखाइए कि $M_2(\mathbf{C}) = V_1 + V_2$ जाँच कीजिए कि $M_2(\mathbf{C}) = V_1 \oplus V_2$ । 5

3. (क) $\{(i, 1, 1), (i, 0, 2), (0, i, 0)\}$ पर ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण विधि का प्रयोग करके $\mathbf{C}^3$ का एक प्रसामान्य लांबिक आधार निकालिए। 7

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है या नहीं। यदि हाँ, तो आव्यूह P और विकर्ण आव्यूह D निकालिए जिससे $P^{-1}AP = D$ । यदि A विकर्णनीय नहीं है, तो A का सहखंडज ज्ञात कीजिए। 6

(ग) मान लीजिए $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\mathbf{R}^3$ के लिए एक क्रमित आधार है जहाँ $\alpha_1=(1,1,-1)$, $\alpha_2=(1,1,0)$ और $\alpha_3=(1,0,0)$। सदिश (a,b,c) को B क सदिशों क रैखिक संचय के रूप में लिखिए। 2

4. (क) जाँच कीजिए कि :

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} a,b,c\in\mathbf{R}\right\},\ M_2(\mathbf{R})$$

का उपसमष्टि है। क्या

$$W_2=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a,b,c\in\mathbf{R}, a>0, c>0\right\} W_1$$

का उपसमष्टि है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है या नहीं : 5

$$x+y-z=2$$

$$x+3y+z=6$$

$$x-2y+z=1$$

यदि ‘हाँ’ तो क्रेमर नियम से समीकरण निकाय को हल कीजिए। यदि ‘नहीं’ तो गौसीय निराकरण से समीकरण निकाय को हल कीजिए।

(ग) b_1, b_2 और b_3 पर प्रतिबंध निकालिए जिससे निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है : 6

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = b_1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_3$$

5. (क) $\mathrm{T}: \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$

$$\mathrm{T}(z_1, z_2, z_3) = z_1 + (1+i)\, z_2 + iz_3,$$

$$(1-i)z_1 + 2z_2, -iz_1 + z_3)$$

द्वारा परिभाषित रैखिक रूपान्तरण लीजिए। T^* ज्ञात कीजिए क्या T स्वसंलग्न है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ख) मान लीजिए :

$$\mathrm{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,$$

$$\mathrm{T}(x, y) = (x, y, x + 2y) \text{ तथा } \mathrm{S} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,$$

$$\mathrm{S}\,(x, y, z) = (x + y,\, y + z)$$

द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक हैं। माना लीजिए B_1 और B_2 $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार हैं। जाँच कीजिए कि $[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1}[S]_{B_1}^{B_2}$ । 8

(ग) बिन्दुओं $(1,-2,1)$ $(1,0,1)$ और $(1,-1,1)$ द्वारा निर्धारित समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि $(1,1,1)$ समतल पर है या नहीं। 3

6. (क) मान लीजिए $R^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$। दिखाइए कि $R^+ \oplus$ और $\odot$ के सापेक्ष एक वास्तविक सदिश समष्टि है जहाँ $a \oplus b = ab$, $\alpha \odot a = a^{\alpha}$ $\forall a, b \in \mathbf{R}^+, \alpha \in \mathbf{R}$ । 6

(ख) कैलि-हामिल्टन प्रमेय को प्रयोग करके आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

(ग) कोशि-श्वार्ट्ज असमिका बताइए। सदिश $(i,1,0)$ और $(1,0,i)$ के लिए असमिका सत्यापित कीजिए। 2

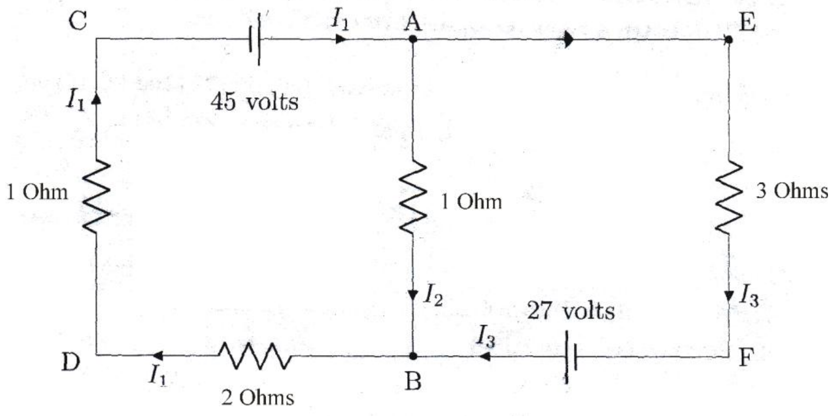
(ग) मान लीजिए A एक 3×4 आव्यूह है। वह प्रारम्भिक आव्यूह लिखिए जिसको A को बाई तरफ से गुणन करने पर आव्यूह A पर निम्नलिखित पंक्ति संक्रियाएँ होंगी : 2

(i) $R_2 \to 3R_2$

(ii) $R_3 \to R_3 - 4R_2$

7. (क) द्विघात समघात $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6xy - 6yz$ का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इसका मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 8

(ख) निम्नलिखित परिपथ की प्रत्येक शाखा में धारा प्रवाह ज्ञात कीजिए : 7



8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-सा कथन सत्य और कौन-सा कथन असत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा दीजिए, जो भी उचित है। 10

(क) यदि V एक सदिश समष्टि है और W_1 और W2 V की उपमसष्टियाँ हैं तो $W_1 \cup W_2$ भी V की उपसमष्टि है।

(ख) v के किसी भी वास्तविक मान के लिए $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय है।

(ग) कोई भी 3 × 3 आव्यूह नहीं है जिसका अल्पिष्ट बहुपद x^3 है।

(घ) यदि $\underline{u} \in \mathrm{V}$ के लिए, सभी $v \in \mathrm{V}$ के लिए यदि $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 0$ है, जहाँ V एक आंतर गुणन सदिश समष्टि है, तो $\underline{u} = 0$।

(च) $\mathrm{T}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, T $(x, y, z) = x + 2y + z$ द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक का शून्यता 2 है।