No. of Printed Pages : 15 **BMTC-134**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

June, 2024

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

(ii) Question No. 8 is compulsory.

(iii) Do any ***six*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***7****.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) Let :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Check whether or not G is a group under multiplication. Is G an abelian group ? Justify your answers. 5

(b) Find the units of : 3

(i) $\mathbf{Z}$

(ii) $\mathbf{Q}$

(c) Let :

$$\alpha = (2 \ \ 1 \ \ 5), \ \ \beta = (2 \ \ 3 \ \ 5 \ \ 4) \in S_5.$$

Compute $\sigma = \alpha \cdot \beta^{-1}$. Write σ as a product of transpositions. Further, find sign σ. 4

(d) Check whether or not : 3

(i) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq \mathbf{Z}_5$ is a subgroup of $\mathbf{Z}_5$.

(ii) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq \mathbf{Z}_6$ is a subgroup of $\mathbf{Z}_6$.

2. (a) Give an example, with justification of a subring of a ring which is not an ideal of the ring. Further, find $I \cap J$ and I + J, where $I = 2\mathbf{Z}$, $J = 3\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$. 6

(b) Let G be a group. Find the conditions on G under which $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$ will be a group homomorphism. Find ker ϕ. Is ϕ surjective ? Why or why not ? 4

(c) Find (132, –250) using the Euclidean algorithm. Also, find m and n in $\mathbf{Z}$ such that : 5

$$m\,(132) + n\,(-250) = (132, -250).$$

3. (a) Let R be a ring with ideals I and J such that $J \subseteq I$. Prove that : 7

$$\frac{(R/J)}{(I/J)} \simeq \left(\frac{R}{I}\right)$$

(b) Find the quotient field of $\mathbf{Q}[\sqrt{5}][x]$. 3

(c) Find all the subgroups of $\mathbf{Z}_{20}$ and give a subgroup diagram for $\mathbf{Z}_{20}$. 5

4. (a) Let A = $\{a, b, c\}$ and B = $\{b, c\}$. Let p(X) denote the power set X. Then show that p (B) $\subseteq$ p (A). Also find all the distinct left cosets of p (B) in p (A). 6

(b) Check whether $\dfrac{\mathbf{Q}[x]}{\langle 9+x+6x^3 \rangle}$ is a field or not. 5

(c) Let $S' = \{z \in C^* \mid |z| = 1\}$ and U_n be the set of nth roots of unity, $n \in \mathbf{N}$. Check whether or not $U_n \Delta S'$. 4

5. (a) Let $R = \mathbf{Z}_{12}$. Give, with justification (i) a nilpotent element of R; (ii) a zero-divisor of R that is not a nilpotent, (iii) char R. 6

(b) State the converse of Lagrange's theorem. Prove or disprove, this statement. 9

6. (a) Show that :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

is a ring with respect to the usual addition and multiplication of matrices. Is it a ring with unity ? Is S commutative ? Give reasons for your answers. 8

(b) Prove that every maximal ideal of a commutative ring R with unit is a prime ideal.

Further, if R has two distinct maximal ideals M_1 and M_2, will M_1+M_2 be a maximal ideal of R ? Why or why not ? 5

(c) By considering the Cayley table below, decide whether the operation * is commutative or not : 2

*	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

7. (a) Let G be a group with trivial centre. Find Z (Aut G). 5

(b) Show that $\frac{\mathbf{R}[x]}{\langle x \rangle}$ and $\mathbf{R}$ are isomorphic rings. 7

(c) Let R be a ring which satisfies the cancellation law for multiplication. Find all the zero divisors in R. 3

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers (with a short proof, or with a counter-example, whichever is appropriate) : 10

(i) $\mathbf{Z}_{10}$ is a subgroup of $\mathbf{Z}_{20}$.

(ii) If F is a field, then F × F is an integral domain.

(iii) char R = char R [x], for any integral domain R.

(iv) If G is a group and $H \Delta G$ s.t. $\frac{G}{H}$ is abelian, then G is abelian.

(v) If R is a ring with identity, then every subring of R is also a ring with identity.

BMTC–134

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डो. पो.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

बी. एम. टी. सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i)* *इस प्रश्न पत्र में आठ सवाल हैं।*

(ii) *सवाल संख्या **8** करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या **1** से **7** में तक कोई भी **6** सवाल कीजिए।*

(iv) *कैलकुलेटर प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) मान लीजिए कि :

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

जाँच कीजिए कि G आव्यूह गुणन के सापेक्ष समूह है या नहीं ? क्या G एक आबेली समूह है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित वलय के मात्रक ज्ञात कीजिए : 3

(i) $\mathbf{Z}$

(ii) $\mathbf{Q}$

(ग) मान लीजिए :

$$\alpha = (2 \quad 1 \quad 5), \;\; \beta = (2 \quad 3 \quad 5 \quad 4) \in S_5$$

$\sigma = \alpha \cdot \beta^{-1}$ परिकलित कीजिए। क्रमचय σ के पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में लिखिए। आगे, σ का चिह्नक ज्ञात कीजिए। 4

(घ) जाँच कीजिए कि : 3

(i) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq \mathbf{Z}_5$ का उपसमूह है या नहीं।

(ii) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq \mathbf{Z}_6$ का उपसमूह है या नहीं।

2. (क) पुष्टि के सात एक वलय का उपवलय का उदाहरण दीजिए जो उस वलय का गुणजावली न हो। आगे, $I \cap J$ और $I + J$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $\mathbf{Z}$ में $I = 2\mathbf{Z}, J = 3\mathbf{Z}$। 6

(ख) मान लीजिए G एक समूह है। $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$ एक समाकारिता होने का प्रतिबंध बताइए। आगे, यदि ϕ का अष्टि ज्ञात कीजिए। क्या ϕ आच्छादक है। क्यों या क्यों नहीं ? 4

(ग) यूक्लिडीय कलन विधि से (132, −250) ज्ञात कीजिए। आगे $m, n \in \mathbf{Z}$ भी ज्ञात कीजिए। जिसके लिए : 5

$$m\,(132) + n\,(-250) = (132, -250).$$

3. (क) मान लीजिए कि I और J वलय R के गुणजावलियाँ हैं और $J \le I$। सिद्ध कीजिए कि : 7

$$\frac{(R/J)}{(I/J)} \simeq \left(\frac{R}{I}\right)$$

(ख) पूर्णांकीय प्रान्त $\mathbf{Q}[\sqrt{5}][x]$ का विभाग क्षेत्र ज्ञात कीजिए। 3

(ग) समूह $\mathbf{Z}_{20}$ का सभी उपसमूह ज्ञात कीजिए और $\mathbf{Z}_{20}$ क उपसमूह आरेख दीजिए। 5

4. (क) मान लीजिए $A = \{a, b, c\}$ और $B = \{b, c\}$। मान लीजिए $p(X)$ समुच्चय X का उपसमुच्चयों का समुच्चय है। दिखाइए कि $p(B) \subseteq p(A)$। आगे $p(A)$ में $p(B)$ का अलग-अलग काम सहसमुच्चय निकालिए। 6

(ख) जाँच कीजिए कि $\dfrac{\mathbf{Q}[x]}{\langle 9 + x + 6x^3 \rangle}$ एक क्षेत्र है या नहीं। 5

(ग) मान लीजिए $S' = \{z \in C^* \mid |z| = 1\}$ और U_n एकक nवें मूलों का समुच्चय है। जाँच कीजिए कि $U_n \Delta S'$। 4

5. (क) मान लीजिए $R = \mathbf{Z}_{12}$ पुष्टि के साथ (i) R का एक शून्यभावी अवयव; (ii) R का एक शून्य भाजक जो शून्यभावी न हो, (iii) char R दीजिए। 6

(ख) लग्रान्ज प्रमेय का प्रतिलोम लिखिए। इस कथन को सत्यापित या असत्यापित कीजिए। 9

6. (क) दिखाइए कि :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

आव्यूह जोड और गुणन के सापेक्ष वलय है। क्या यह तत्समकी वलय है ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि एक तत्समकीय वलय R का उच्चिष्ठ गुणजावली अभाज्य गुणजावली होता है। आगे यदि R में दो अलग-अलग उच्चिष्ठ

गुणजावलियाँ हैं। क्या M_1+M_2 वलय के उच्छिष्ठ गुणजावली होगी ? क्यों, या क्यों नहीं ?

5

(ग) निम्नलिखित कैली तालिका देखिए और निर्णय कीजिए कि संक्रिया * क्रमविनिमेय है या नहीं :

2

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

7. (क) मान लीजिए कि G एक समूह है, जिसका केन्द्र तुच्छ है। Z (Aut G) ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दिखाइए कि $\frac{\mathbf{R}[x]}{\langle x \rangle}$ और R तुल्याकारी वलय है। 7

(ग) मान लीजिए R एक वलय है जो गुणन के सापेक्ष निरसर नियम संतुष्ट करता है। R के सभी शून्य करणी ज्ञात कीजिए। 3

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य ह ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण, जो भी उचित है, द्वारा दीजिए : 10

(i) समूह $\mathbf{Z}_{10}$ समूह $\mathbf{Z}_{20}$ का उपसमूह है।

(ii) यदि F एक क्षेत्र है, तो $F \times F$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है।

(iii) कोई भी पूर्णांकीय प्रान्त R के लिए char R = char R $[x]$

(iv) यदि G एक समूह है $H \Delta G$ और $\frac{G}{H}$ आबेली है, तो G आबेली है।

(v) यदि R एक तत्समकीय वलय है, तो R का प्रत्येक उपवलय तत्समकीय वलय है।