No. of Printed Pages : 12 **BMTC-133**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) / BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2024

BMTC-133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Question No. **1** is compulsory.*

*(ii) Do any **six** questions from Q. Nos. **2** to **8**.*

*(iii) Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. Which of the following statements are TRUE or FALSE ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 2×5=10

(a) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-7}{3^n}$ is convergent.

(b) The function f given by :

$$f(x) = -|x+3|$$

$$x \in [-4, 4]$$

has a local maximum point.

(c) The negation of $p \wedge \sim q$ is $q \rightarrow p$.

(d) Every increasing sequence has a convergent subsequence.

(e) $f(x) = [x]$ is not integrable on [– 1, 1].

2. (a) Show that the sequence $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5^n}$ is a Cauchy sequence. 5

(b) Show that the function f defined on [0, 1] by : 5

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{when } x = \dfrac{1}{n} \text{ for some } n \in \mathbf{N} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

is Riemann integrable.

(c) State the Fundamental Theorem of Calculus. Use it to evaluate $\int_0^1 3^x \, dx$. 5

3. (a) Prove that $n^3 + 2^n$ is divisible by 3 for all $n \geq 1$, by mathematical induction theory. 5

(b) Let f be a function defined on $\mathbf{R}$ as : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Prove that f is discontinuous at each $x \in \mathbf{R}$.

(c) Define pointwise convergence for a sequence of functions. Check whether the sequence $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where : 5

$$f_n(x) = \frac{\cos 2nx}{n^3}, \quad x \in [0, 1]$$

is pointwise convergent or not.

4. (a) Check whether the following sets are closed or not : 4

(i) $S_1 = \{x \in \mathbf{R} : 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0\}$

(ii) $S_2 = [5, 10] \cup [3, \pi] \cup [\sqrt{5}, \sqrt{11}]$

(b) Test the following series for convergence : 6

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n.3^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} + 2n^{1/4} + 3}$

(c) Evaluate : 5

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3r)^3}}$$

5. (a) Let S be an open subset of **R**. Show that S^C is closed. 5

(b) Prove that : 5

$$f(x) = x^2$$

is Riemann integrable. Hence, show that $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

(c) State Cauchy's first theorem on limits. Use it to show that : 5

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2} \right] = 0$$

6. (a) Prove that if a function f is uniformly continuous on an interval I, then it is continuous on I. How about its converse ? Prove or disprove. 5

(b) Test the convergence of the following series : 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(4n+1)!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{7^n+4^n}$

(c) Consider the function : 5

$$f(x) = (1+x)^{1/3}, \ x \geq 0$$

Find the Taylor's polynomial $P_2(x)$ and the remainder term $R_2(x)$ at $a = 0$.

7. (a) Find a limit point of the set : 5

$$\left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\},$$

if any.

(b) If an infinite series Σa_n converges, then show that $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. 5

(c) Show that for the function : 5

$$f(x) = x^3 - 6x - 5$$

there is some $c \in]2, 3[$ such that $f'(c) = 12$. Find a value for such a point c.

8. (a) Show that the sequence (a_n), where :

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}, \quad n \geq 1$$

is convergent. Also find the limit of a_n as $n \to \infty$. 5

(b) Prove that between any two real roots of $e^x . \cos x = 1$, there is at least one real root of $e^x . \sin x = 1$. 5

(c) Show that : 5

$$\sum \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$$

is uniformly convergent on [0, 2].

BMTC-133

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)

[बी. एस-सी. (जी.)/ बी. ए. (जी.)]

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

बी.एम.टी.सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i)* प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या **2** से **8** तक किन्हीं **6** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण, जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण दीजिए : $2 \times 5 = 10$

(अ) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-7}{3^n}$ अभिसारी है।

(ब) $f(x) = -|x+3|, x \in [-4, 4]$ द्वारा परिभाषित फलन f का स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है।

(स) $p \wedge \sim q$ का निषेध $q \to p$ है।

(द) प्रत्येक वर्धमान अनुक्रम का एक अभिसारी उपअनुक्रम होता है।

(य) $f(x) = [x]$ अन्तराल [– 1, 1] पर समाकलनीय नहीं है।

2. (अ) दिखाइए कि अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, एक कौशी अनुक्रम है, जहाँ $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5^n}$ । 5

(ब) दिखाइए कि [0, 1] पर निम्न द्वारा परिभाषित फलन f:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{जब } x = \dfrac{1}{n} \text{ किसी } n \in \mathrm{N} \text{ के लिए} \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

रीमान समाकलनीय है। 5

(स) कलन के मूलभूत प्रमेय का कथन दीजिए। इसका प्रयोग करके $\int_0^1 3^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

3. (अ) गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी $n \geq 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $n^3 + 2^n$ संख्या 3 से विभाज्य है। 5

(ब) मान लीजिए एक फलन f, $\mathbf{R}$ पर निम्न प्रकार परिभाषित है : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ पर f असंतत है।

(स) फलन-अनुक्रमों के बिंदुशः अभिसरण को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि अनुक्रम $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, जहाँ : 5

$$f_n(x) = \frac{\cos 2nx}{n^3}, \quad x \in [0, 1]$$

बिंदुशः अभिसारी है या नहीं।

4. (अ) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय संवृत हैं या नहीं : 4

(i) $S_1 = \{x \in \mathbf{R} : 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0\}$

(ii) $S_2 = [5, 10] \cup [3, \pi] \cup [\sqrt{5}, \sqrt{11}]$

(ब) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : 6

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n.3^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} + 2n^{1/4} + 3}$

(स) मान ज्ञात कीजिए : 5

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3r)^3}}$$

5. (अ) मान लीजिए S, **R** का एक विवृत उपसमुच्चय है। दिखाइए कि S^C संवृत है। 5

(ब) सिद्ध कीजिए कि $f(x)=x^2$ रीमान समाकलनीय है। इस प्रकार दिखाइए कि $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$ है। 5

(स) सीमाओं पर कौशी के प्रथम प्रमेय का कथन दीजिए। इसका प्रयोग करके दिखाइए कि : 5

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots.+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0$$

6. (अ) सिद्ध कीजिए कि यदि कोई फलन f अंतराल I पर एकसमानतः संतत है, तो वह I पर भी संतत होगा। इसके विलोम के बारे में आपका क्या मानना है ? सिद्ध या असिद्ध कीजिए। 5

(ब) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए : 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(4n+1)!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{7^n + 4^n}$

(स) फलन :

$$f(x) = (1+x)^{1/3}, \quad x \geq 0$$

पर विचार कीजिए। $a = 0$ पर टेलर बहुपद $P_2(x)$ और शेषफल पद $R_2(x)$ ज्ञात कीजिए।

5

7. (अ) समुच्चय :

$$\left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

का कोई एक सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व हो। 5

(ब) यदि कोई अनंत श्रेणी Σa_n अभिसारी है, तो दिखाइए कि $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ है। 5

(स) दिखाइए कि फलन : 5

$$f(x) = x^3 - 6x - 5$$

के लिए कोई बिन्दु $c \in]2, 3[$ इस प्रकार है कि $f'(c) = 12$ है। ऐसे बिन्दु c का एक मान भी निकालिए।

8. (अ) दिखाइए कि अनुक्रम (a_n), जहाँ :

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}, n \geq 1$$

अभिसारी है। साथ ही, जब $n \to \infty$ हो तब a_n की सीमा भी ज्ञात कीजिए। 5

(ब) सिद्ध कीजिए कि $e^x . \cos x = 1$ के किन्हीं भी **दो** वास्तविक मूलों के बीच कम से कम एक मूल समीकरण $e^x . \sin x = 1$ का है। 5

(स) दिखाइए कि : 5

$$\sum \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$$

[0, 2] पर एकसमानतः अभिसारी है।