

No. of Printed Pages : 12

BMTC–131

**BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/
BACHELOR OF ARTS (GENERAL)
(BSCG/BAG)**

Term-End Examination

June, 2024

BMTC-131 : CALCULUS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **six** questions from
Question No. 2 to 8.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are true or false ? Give reasons for your answer in the form of a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 5×2=10

(i) The set $S = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ is an infinite set.

P. T. O.

(ii) The greatest integer function is continuous on \mathbf{R} .

$$(iii) \frac{d}{dx} \left[\int_3^{e^x} \ln t \, dt \right] = xe^x - \ln 3.$$

(iv) Every integrable function is monotonic.

(v) $a \oplus b = \sqrt{a+b}$ defines a binary operation on \mathbf{Q} , the set of rational numbers.

2. (a) Find the domain of the function f given by

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2+1}}. \quad 4$$

(b) The set \mathbf{R} of real numbers with the usual addition (+) and usual multiplication (.) is given. Define (*) on \mathbf{R} as :

$$a * b = \frac{a+b}{2}, \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

Is (*) associative in \mathbf{R} ? Is (.) distributive (*) in \mathbf{R} ? Check. 5

(c) If $|z-1+2i| = 4$, show that the point $z+i$ describes a circle. Also draw this circle. 6

3. (a) Express $\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}$ as a sum of partial fractions. 4

(b) Find the least value of $a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$, where $a > 0, b > 0$. 5

(c) Evaluate : 6

$$\int \frac{x^2 \cot^{-1}(x^3)}{1+x^6} dx$$

4. (a) For any two sets S and T, show that :

$$S \cup T = (S - T) \cup (S \cap T) \cup (T - S).$$

Depict this situation in the Venn diagram.

4

(b) Let f and g be two functions defined on \mathbf{R} by :

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$\text{and } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x+3}, & \text{when } x \neq -3 \\ \alpha, & \text{when } x = -3 \end{cases}$$

(i) Find the value of α for which f is continuous at $x = -3$. 3

(ii) Find all the roots of $f(x) = 0$. 3

- (c) Find the area between the curve $y^2(4-x) = x^3$ and its asymptote parallel to y -axis. 5
5. (a) If the revenue function is given by $\frac{dR}{dx} = 15 + 2x - x^2$, x being the input, find the maximum revenue. Also find the revenue function R , if the initial revenue is 0. 5
- (b) Trace the curve $y^2(x+1) = x^2(3-x)$, clearly stating all the properties used for tracing it. 10
6. (a) Find the length of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ and show that the line $\theta = \frac{2\pi}{3}$ divides it in the ratio 1 : 3. 8
- (b) Find the condition for the curves, $ax^2 + by^2 = 1$ and $a'x^2 + b'y^2 = 1$ intersecting orthogonally. 7

7. (a) If $y = e^{m \sin^{-1} x}$, then show that

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0. \quad \text{Hence using}$$

Leibnitz's formula, find the value of

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1}. \quad 6$$

(b) Find the largest subset of \mathbf{R} on which the

function $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ defined as : 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 5 \\ x + 5, & 1 \leq x \leq 5 \\ |x|, & x < 1 \end{cases}$$

is continuous.

(c) Solve the equation : 5

$$x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$$

given that its roots are in G. P.

8. (a) Evaluate : 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

(b) If $I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n dx$, show that :

$$(m+1)I_{m,n} = x^{m+1} (\log x)^n - n I_{m,n-1}.$$

Hence find the value of $\int x^4 (\log x)^3 dx$. 7

(c) Verify Lagrange's mean value theorem for the function f defined by $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$ over $[2, 5]$. 4

BMTC-131

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)
(बी.एस.-सी.जी./बी.ए.जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2024

बी.एम.टी.सी.-131 : कलन

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) प्रश्न संख्या 1 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 8 तक कोई छः प्रश्न हल कीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

(i) समुच्चय $S = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ एक अपरिमित समुच्चय है।

(ii) अधिकतम पूर्णांक फलन \mathbf{R} पर सतत् होता है।

$$(iii) \frac{d}{dx} \left[\int_3^{e^x} \ln t \, dt \right] = xe^x - \ln 3$$

(iv) प्रत्येक समाकलनीय फलन एकदिष्ट होता है।

(v) $a \oplus b = \sqrt{a+b}$, परिमेय संख्याओं के समुच्चय \mathbf{Q} पर एक द्विआधारी संक्रिया है।

2. (क) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2+1}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत ज्ञात कीजिए। 4

(ख) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय \mathbf{R} और सामान्य जोड़ (+) तथा सामान्य गुणनफल (.) दिए गये हैं। (*), \mathbf{R} पर निम्नलिखित से परिभाषित है :

$$a * b = \frac{a+b}{2}, \forall a, b \in \mathbf{R}$$

क्या (*), \mathbf{R} सहयोगी है ? क्या (.), (\mathbf{R}) में (*) पर वितरित है ? जाँच कीजिए। 5

(ग) यदि $|z-1+2i|=4$ है, तो दर्शाइए कि बिन्दु $z+i$ एक वृत्त निरूपित करता है। इस वृत्त को खींचिए। 6

3. (क) $\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}$ को आंशिक भिन्नों के योग में व्यक्त कीजिए। 4

(ख) $a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$, जहाँ $a > 0, b > 0$ हैं, का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 5

(ग) $\int \frac{x^2 \cot^{-1}(x^3)}{1+x^6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 6

4. (क) दो समुच्चयों S और T के लिए दर्शाइए कि :

$$S \cup T = (S - T) \cup (S \cap T) \cup (T - S)$$

है। वेन आरेख में भी स्थिति दर्शाइए। 4

(ख) \mathbf{R} पर $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ और

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x+3}, & \text{जब } x \neq -3 \\ \alpha, & \text{जब } x = -3 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित दो फलन f और g लीजिए।

(i) α का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए f ,

$$x = -3 \text{ पर सतत् है।} \quad 3$$

(ii) $f(x) = 0$ के सभी मूल ज्ञात कीजिए। 3

(ग) वक्र $y^2(4-x) = x^3$ और इसकी y -अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शी के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

5. (क) यदि एक आय फलन $\frac{dR}{dx} = 15 + 2x - x^2$ द्वारा

दिया गया है, जहाँ x निवेश है, तो अधिकतम

आय ज्ञात कीजिए। यदि प्रारम्भिक आय 0 है, तो

आय फलन R भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) वक्र $y^2(x+1) = x^2(3-x)$ का आरेखण

कीजिए और ऐसा करने के लिए प्रयोग किए गये

गुणधर्म भी लिखिए। 10

6. (क) चक्रज $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ की लम्बाई ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि रेखा $\theta = \frac{2\pi}{3}$, इसे 1 : 3 के अनुपात में विभक्त करती है। 8

- (ख) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए कि वक्र $ax^2 + by^2 = 1$ और $a'x^2 + b'y^2 = 1$ एक-दूसरे को लम्बवत् प्रतिच्छेद करते हैं। 7

7. (क) यदि $y = e^{m \sin^{-1} x}$ है, तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ है। इस प्रकार लाइब्लित्ज के सूत्र का प्रयोग करके $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1}$ का मान निकालिए। 6

(ख)
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 5 \\ x + 5, & 1 \leq x \leq 5 \\ |x|, & x < 1 \end{cases}$$

- द्वारा परिभाषित फलन f, \mathbf{R} के जिस भी सबसे बड़े समुच्चय पर सतत् है, वह निकालिए। 4

(ग) समीकरण $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$

हल कीजिए, जिसके सभी मूल G.P. में हैं। 5

8. (क) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ज्ञात कीजिए। 4

(ख) यदि $I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n dx$, है, तो दर्शाइए

कि :

$$(m+1)I_{m,n} = x^{m+1}(\log x)^n - nI_{m,n-1}$$

है। इस प्रकार $\int x^4 (\log x)^3 dx$ ज्ञात कीजिए। 7

(ग) $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$ द्वारा परिभाषित फलन

f के लिए अंतराल $[2,5]$ पर लैग्रांज माध्यमान

प्रमेय सत्यापित कीजिए। 4