

BACHELOR OF SCIENCE (B. SC.)

Term-End Examination

June, 2023

**PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN
PHYSICS—III**

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Attempt all questions.*

(ii) *The marks for each question are indicated against it.*

(iii) *Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any *five* parts : 2×5=10

(a) Determine the eigen values of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Define symmetric and anti-symmetric tensors.

- (c) Locate and name the singularity of the following function in the finite z -plane :

$$\frac{\sin z^2}{z}$$

- (d) Calculate the residues of the function :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2}$$

- (e) If ω be the imaginary cube root of unity, show that the set $\{1, \omega, \omega^2\}$ is a cyclic group of order 3 with respect to multiplication.
- (f) Obtain the Laplace transform of $f(t) = 7 + 2e^{3t}$.
- (g) Plot Bessel functions of the first kind of order 1.
- (h) Using the Rodrigue's formula for the Hermite polynomials :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

evaluate $H_2(x)$.

2. Attempt any *two* parts : 5×2=10

(a) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Show that the eigen values of a Hermitian matrix are real.

(c) What are covariant and contravariant vectors ? Show that velocity is a contravariant vector.

3. Attempt any *two* parts : 5×2=10

(a) Show that $u = 2x(1 - y)$ is harmonic and obtain its harmonic conjugate v .

(b) Obtain a Taylor's series expansion of $\sin z$ about $z = \frac{\pi}{4}$.

(c) Using the method of residues, prove that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

4. Attempt any *two* parts : 5×2=10

(a) Calculate the inverse Laplace transform of the following function :

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2 - 4}$$

(b) Use Laplace transform to solve the initial value problem :

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

$$y(0) = 3,$$

$$y'(0) = 1.$$

(c) Obtain the Fourier cosine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

5. Attempt any *one* part : 10×1=10

(a) Expand the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

in a series of the form $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$, where

$P_k(x)$ is a Legendre polynomial.

- (b) Using the generating function for Hermite polynomials :

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

obtain the recurrence relation :

$$H_{n+2}(x) = 2x H_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

PHE-14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(iii) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई **पाँच** भाग कीजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मान प्राप्त कीजिए।

(ख) सममित और असममित टेन्सरों की परिभाषा दीजिए।

- (ग) निम्नलिखित फलन की z -तल में विचित्रता ज्ञात कीजिए और उसका नाम बताइए :

$$\frac{\sin z^2}{z}$$

- (घ) फलन

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2}$$

के अवशिष्ट परिकलित कीजिए।

- (ङ) यदि $\omega, 1$ का अधिकल्पित घनमूल हो, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गुणन के अधीन कोटि 3 वाला एक चक्रीय समूह है।

- (च) $f(t) = 7 + 2e^{3t}$ का लाप्लास रूपांतरण प्राप्त कीजिए।

- (छ) कोटि 1 वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन का आरेख खींचिए।

(ज) हर्मिट बहुपदों के लिए रोड्रिग क सूत्र :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

का उपयोग कर $H_2(x)$ ज्ञात कीजिए।

2. कोई दो भाग कीजिए : प्रत्येक 5

(क) आव्यूह A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

के लिए कैली-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि हर्मिटी आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

(ग) सहपरिवर्ती और प्रतिपरिवर्ती सदिश क्या होते हैं ? सिद्ध कीजिए कि वेग प्रतिपरिवर्ती सदिश है।

3. कोई दो भाग कीजिए :

प्रत्येक 5

(क) सिद्ध कीजिए कि :

$$u = 2x(1 - y)$$

प्रसंवादी है और इसका प्रसंवादी संयुग्मी v ज्ञात कीजिए।

(ख) $z = \frac{\pi}{4}$ के प्रति $\sin z$ का टेलर श्रेणी प्रसार

प्राप्त कीजिए।

(ग) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

4. कोई दो भाग कीजिए :

प्रत्येक 5

(क) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर

ज्ञात कीजिए :

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2 - 4}$$

(ख) लाप्लास रूपांतरण का उपयोग कर निम्नलिखित

आदि-मान समस्या को हल कीजिए :

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

$$y(0) = 3,$$

$$y'(0) = 1.$$

(ग) फलन

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

का फूरिये कोसाइन रूपांतरण प्राप्त कीजिए।

5. कोई एक भाग कीजिए :

प्रत्येक 10

(क) फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

का स्वरूप $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$ की श्रेणी में प्रसार

कीजिए, जहाँ $P_k(x)$ लैजन्ड्र बहुपद है।

(ख) हर्मिट बहुपदों के लिए जनक फलन :

$$g(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त कीजिए :

$$H_{n+2}(x) = 2x H_{n+1}(x) - 2(n+1) H_n(x)$$