No. of Printed Pages : 11 **MTE-14**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2023

(Elective Course : Mathematics)

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *(i) Attempt any* ***five*** *questions.*

(ii) All questions carry equal marks.

(iii) Use of calculators is not allowed.

(iv) Symbols have their usual meanings.

---

1. (a) Suppose that the populations $x(t)$ and $y(t)$ satisfy the model given by the following system of equations :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

Determine all the critical points of the system and discuss their type and stability.

Which critical point does represent the possibility of co-existence of the two populations ? 7

(b) Explain the difference between continuous and discrete models with suitable example of each type. 3

2. (a) Determine whether equilibrium solution exists for markets with the following demand and supply functions : 6

(i) $D = 50 - 4p$, $S = 10 + 10p - p^2$

(ii) $D = 56 - 4p$, $S = 2 + 10p - p^2$

(b) Consider the flow of fluid due to pressures gradient in a tube of radius R and length L. Find the bounds for velocity distribution. 4

3. (a) For the model :

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex,\ x(0) = K,$$

where r_1, E and K are constants, determine $x(t)$ explicitly. Verify that for $x > K\left(1 - \frac{E}{r_1}\right)$ if $E \le r_1$, then $x(t) \to K\left(1 - \frac{E}{r_1}\right)$ as $t \to \infty$, whereas if $E > r_1$, then $x(t) \to 0$ exponentially as $t \to \infty$. 5

(b) Let x and y, respectively, denote the proportion of susceptibles and carriers of a disease in the population. Suppose that carriers are removed from the population at a rate β and disease spread at a rate proportional to the product of x and y, determine the following : 5

(i) Carriers at any time t, where $y(0) = y_0$.

(ii) The susceptibles at time t, where $x(0) = x_0$.

4\. (a) A particle is thrown vertically upwards with a velocity 100 m/sec. How high does it go, and how much time does it take to reach this height ? ($g = 9.8$ m/sec^2) 6

(b) Identify the two essentials and two non-essentials in problem to find the relationship between blood flow and physiological characteristics of blood vessel. 4

5\. (a) In a barber's shop with single barber, there are 3 chairs. Out of these one chair is for hair cutting and the other jor for waiting inside the shop. If there are more than

three customers in the shop, then leaving three rest wait outside. The customers come according to Poisson distribution with average two customers per hour. The service time T (per customer) is exponentially distributed with mean 20 minutes. 6

(i) Find the probability that an arriving customer has to wait outside the shop.

(ii) Find the probability that an arriving customer gets a chair to sit.

(iii) How long an arriving customer is expected to wait before start of service ?

(b) For the data on fertilizer and yield of grain, find the regression of yield of grain on the amount of fertilizer applied : 4

Fertilizer (x)	**Yield (y)**
30	43
40	45
50	54
60	53
70	56
80	63

6. (a) Prove that the particle moving under a central force sweeps out equal area in equal intervals of time. 5

(b) The pay-off matrix to A is as shown in the table. Determine the optimum strategy for B : 5

Player B

$$\text{Player A} \quad \begin{matrix} & 1 & 2 \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

		Player B 1	Player B 2
Player A	1	2	5
	2	3	1
	3	0	3

7. (a) Find the covariance of two securities whose return distribution are given by below table : 5

Event (j)	Chance $P_{1j} = P_{2j}$	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	.25	11	9

(b) Find a relationship between the escape velocity and the minimum velocity with which a particle is to be projected horizontally so that the particle circles around the earth. 5

MTE-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *(i)* किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(iii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. (क) मान लीजिए जनसंख्याएँ $x(t)$ और $y(t)$ निम्नलिखित समीकरण निकाय द्वारा प्राप्त निदर्श को संतुष्ट करतो हैं :

$$\frac{dx}{dt} = 14x - 2x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 16y - 2y^2 - xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए और उनके प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए। कौन-सा क्रांतिक बिन्दु दोनों जनसंख्याओं के सहअस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है ? 7

(ख) प्रत्येक प्रकार के उपयुक्त उदाहरणों के साथ सतत और असतत मॉडलों के बीच अन्तर की व्याख्या कीजिए। 3

2. (क) निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित माँग और आपूर्ति फलनों वाले बाजारों के लिए सन्तुलन समाधान मौजूद है या नहीं : 6

(i) $D = 50 - 4p, S = 10 + 10p - p^2$

(ii) $D = 56 - 4p, S = 2 + 10p - p^2$

(ख) त्रिज्या R और लंबाई L की एक ट्यूब में दबाव प्रवणता के कारण द्रव के प्रवाह पर विचार कीजिए और वेग वितरण के लिए सीमा ज्ञात कीजिए। 4

3. (क) निकाय :

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex, x(0) = K$$

जहाँ कि r_1, E और K अचर हं, के लिए $x(t)$ का मान स्पष्ट रूप से ज्ञात कीजिए। सत्यापित कीजिए कि $x > K\left(1 - \frac{E}{r_1}\right)$ के लिए यदि $E \le r_1$ है, तो $x(t) \to K\left(1 - \frac{E}{r_1}\right)$ जबकि $t \to \infty$, और यदि $E > r_1$ है, तो $x(t) \to 0$ चरघातांकी रूप से जबकि $t \to \infty$ होगा। 5

(ख) मान लीजिए कि x और y क्रमश: अतिसंवेदनशील और रोग वाहकों की जनसंख्या को दर्शाते हैं। माना कि वाहकों को β दर पर जनसंख्या से हटाया जाता है और रोग का फैलना x और y के गुणन के अनुपात पर निर्भर है, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए : 5

(i) किसी समय t पर रोग वाहकों की संख्या जबकि, $y(0) = y_0$

(ii) समय t पर अतिसंवेदनशीलों की जनसंख्या जबकि, $x(0) = x_0$

4. (क) एक कण को वेग 100 m/sec के साथ लंबवत ऊपर की ओर फेंका जाता है। यह कितनी ऊँचाई

तक जाता है और इस ऊँचाई तक पहुँचने में कितना समय लगेगा ? ($g = 9.8$ m/sec^2) 6

(ख) रक्त प्रवाह और रक्त वाहिका की शारीरिक विशेषताओं के बीच सम्बन्ध खोजने के लिए **दो** अनिवार्य और **दो** गैर–अनिवार्य कारकों को सूचीबद्ध कीजिए। 4

5. (क) एक नाई की दुकान में एकल नाई के साथ तीन कुर्सियाँ हैं। इनमें से एक कुर्सी बाल काटने के लिए और बाको दो दुकान के अंदर प्रतोक्षा करने के लिए हैं। अगर दुकान पर 3 से ज्यादा ग्राहक हैं, तो तीन को छोड़कर बाकी बाहर इंतजार करते हैं। ग्राहक प्वॉयसां वितरण के अनुसार 2 ग्राहक प्रति घंटा की दर से आते हैं। सेवा समय चरघातांकीय रूप से माध्य 20 मिनट के साथ वितरित किया जाता है। 6

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक आने वाले ग्राहक को दुकान के बाहर इंतजार करना पड़ता है।

(ii) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि ग्राहक को बैठने के लिए कुर्सी मिलती है।

(iii) सेवा शुरू होने से पहले आने वाले ग्राहक से कितनी देर तक प्रतीक्षा करन की उम्मीद की जाती है ?

(ख) उर्वरक और अनाज की उपज के आँकड़ों के लिए लागू उर्वरकों की मात्रा पर अनाज की उपज का प्रतिगमन ज्ञात कीजिए : 4

उर्वरक (x)	**उपज (y)**
30	43
40	45
50	54
60	53
70	56
80	63

6. (क) सिद्ध कीजिए कि एक केन्द्रीय बल के अन्तर्गत गतिमान कण समान समय अंतराल में समान क्षेत्रफल तय करता है। 5

(ख) A के लिए भुगतान-आव्यूह नीचे दिया गया है। B के लिए इष्टतम युक्तियाँ ज्ञात कीजिए : 5

खिलाड़ी B

$$\text{खिलाड़ी A} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

7. (क) दो प्रतिभूतियों, जिनका प्रतिफल बंटन नीचे सारणी में दिया गया है, का सहप्रसरण ज्ञात कीजिए : 5

घटना	संयोग	प्रतिफल	
(j)	$P_{1j} = P_{2j}$	R_{1j}	R_{2j}
1	0.33	16	14
2	0.25	12	8
3	0.17	8	5
4	.25	11	9

(ख) किसी कण के पलायन वेग और उसके उस न्यूनतम वेग में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए जिससे उसे क्षैतिज से प्रक्षेपित करने पर वह पृथ्वी के चारों ओर चक्कर लगा सके। 5