

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

June, 2023

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : Attempt *five* questions in all. Q. No. 7 is compulsory. Answer any *four* questions from

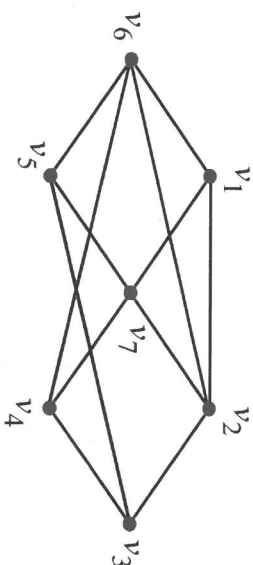
Question Nos. 1 to 6. Calculators are not allowed. All the symbols used have their usual meaning.

1. (a) Check whether the complement of C_5 is isomorphic to C_5 or not. 2
- (b) How many integers from 0 to 637 are not divisible by either 3 or 5? 3
- (c) Test the validity of the following argument using a truth table : 5

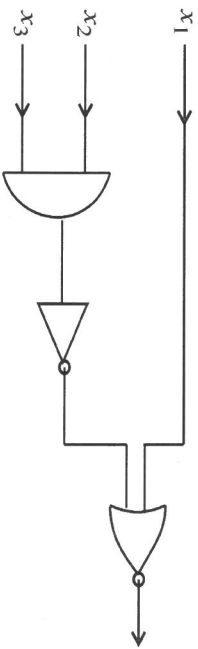
P. T. O.

“If there is a cricket match, then travelling is difficult. If the teams arrived on time, then travelling was not difficult. The teams arrived on time. Therefore, there was no cricket match.”

2. (a) Calculate the Bell number, B_5 . 3
- (b) Solve the recurrence relation : 3
 $b_n = b_{n-1} + 4(n-1)$, when $b_0 = 1$.
- (c) Using mathematical induction, prove that $9^n - 5^n$ is divisible by 4 for all $n \geq 1$. 4
3. (a) Let G be a connected graph with exactly two odd vertices. Show that G is edge-traceable. 4
- (b) Check whether the following graph is planar or not : 3



(b) Write the Boolean expression for the following logic circuit : 3



4. (a) Prove the identity : 3

$$\sum_{i=0}^m C(n, i) \cdot C(n, m-i) = C(2n, m)$$

for all $0 \leq m \leq n$.

(b) Explain the polynomial, $x^4 + x^3 + x$ in terms of the falling factorials. 3

(c) Show that if G is a k -regular graph on n vertices, then at least one of k and n is even. Further, construct a 6-regular graph on 9 vertices. 4

5. (a) Reduce the following Boolean expression into its disjunctive normal form : 3

$$(\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r)$$

(b) Find the number of distinct integer solutions of the equation : 3

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6 = 28$$

where $x_i \geq i$ and $1 \leq i \leq 6$.

(c) Solve the recurrence relation : 4

$$a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 2^n$$

for $n \geq 2$ with $a_0 = 5$ and $a_1 = 23$.

6. (a) Find the number of ways in which 4 houses can be painted with 6 different colours, if each house has to get a different colour. 2

(b) If a pair of dice is rolled, what is the probability that the sum on the two dice is odd ? 3

(c) Check whether or not the following two statements for a graph G are equivalent : 5

(i) Any two vertices in G are connected by a unique path.

(ii) G is a tree.

7. Which of the following statements are true which are false ? Justify your answer : 10

(i) The recurrence relation :

$$a_n = a_{n-1}^2 + \sqrt{a_{n-2}}$$

is linear and homogeneous.

(ii) There exists a Boolean expression in variables x_1, x_2 and x_3 with CNF as :

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1)$$

(iii) The edge chromatic number of the graph K_{10} is 9.

(iv) "Every even number is divisible by 4 or every equilateral triangle is an isosceles triangle" is a true statement.

(v) If a coin is tossed four times, the probability of getting more tails than heads is $\frac{1}{4}$.

MTE-13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

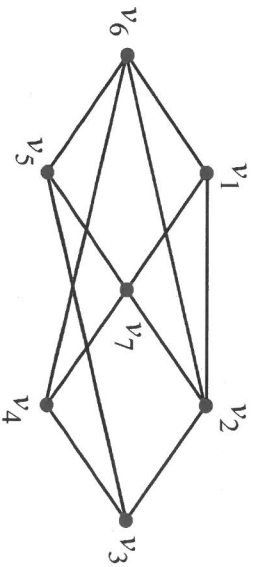
अधिकतम अंक : 50

नोट : कुल पाँच प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

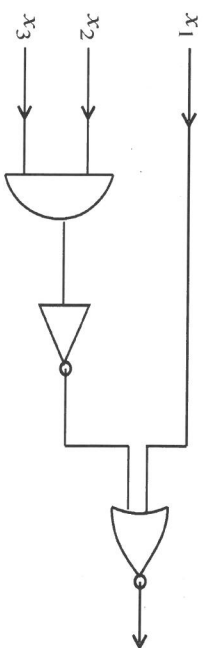
-
- (क) जाँच कीजिए कि C_5 का पूरक C_5 के तुल्याकारी है या नहीं। 2
 - (ख) 0 से 637 तक के पूर्णाकों में से कितने पूर्णाक 3 या 5 से विभाज्य नहीं हैं ? 3
 - (ग) सत्य सारणी के प्रयोग से, निम्नलिखित तर्क की वैधता की जाँच कीजिए : 5
"यदि क्रिकेट मैच होता है, तो यात्रा मुश्किल है। यदि दल समय पर आ जाते हैं तो यात्रा मुश्किल नहीं है। दल समय पर पहुँच जाते हैं। इसलिए, कोई क्रिकेट मैच नहीं था।"

2. (क) बेल संख्या, B_5 परिकल्पित कीजिए। 3
- (ख) पुनरावृत्ति संबंध $b_n = b_{n-1} + 4(n-1)$, जहाँ $b_0 = 1$ है, को हल कीजिए। 3
- (ग) गणितीय आगमन के सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \geq 1$ के लिए $9^n - 5^n$, 4 से विभाज्य है। 4

3. (क) मान लीजिए G एक ऐसा संबद्ध ग्राफ है जिसमें केवल दो विषम शीर्ष हैं। दिखाइए कि G कोर-अनुरेखीय है। 4
- (ख) जाँच कीजिए कि नीचे दिया गया ग्राफ समतलीय है या नहीं : 3



- (ग) नीचे दिए गए लॉजिक परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक लिखिए : 3



4. (क) सर्वसमिका :

$$\sum_{i=0}^m C(n, i) \cdot C(n, m-i) = C(2n, m)$$

- को सभी $0 \leq m \leq n$ के लिए सिद्ध कीजिए। 3
- (ख) बहुपद $x^4 + x^3 + x$ को पतती क्रमगुणितों के पदों में व्यक्त कीजिए। 3
- (ग) दिखाइए कि यदि G, n शीर्षों वाला एक h -नियमित ग्राफ है, तो h और n में से कम से कम कोई एक सम संख्या होगा। आगे, 9 शीर्षों पर एक 6-नियमित ग्राफ बनाइए। 4

5. (क) निम्नलिखित बूलीय व्यंजक को इसके सममलन प्रसामान्य समघात में समानीत कीजिए : 3

$$(\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r)$$

(ख) समीकरण

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6 = 28$$

- जहाँ $x_i \geq 1$ और $1 \leq i \leq 6$ हैं, के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए। 3

(ग) पुनरावृत्ति संबंध :

$$a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 2^n, n \geq 2$$

- जहाँ $a_0 = 5$ और $a_1 = 23$ हैं, को हल कीजिए। 4

6. (क) उन तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 4 घरों को 6 भिन्न-भिन्न रंगों से इस प्रकार रंगा जाए कि प्रत्येक घर को एक अलग रंग मिले। 2

P. T. O.

- (ख) यदि दो पासों को एक साथ फेंका जाता है, तो क्या प्राधिकता है कि दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योगफल एक विषम संख्या है ? 3

(ग) जाँच कीजिए कि किसी ग्राफ G के लिए

निम्नलिखित दो कथन तुल्य हैं या नहीं : 5

- (i) G के कोई भी दो शीर्ष एक अद्वितीय पथ के जुड़े हैं।

(ii) G एक वृक्ष है।

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : 10

- (i) पुनरावृत्ति संबंध $a_n = a_{n-1}^2 + \sqrt{a_{n-2}}$ रैखिक और समघात है।

- (ii) चरों x_1, x_2, x_3 में एक ऐसा बूलीय व्यंजक है जिसका CNF, $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1)$ है।

- (iii) ग्राफ K_{10} की कोर-वर्णिक संख्या 9 है।
- (iv) "प्रत्येक सम संख्या 4 से विभाज्य है या प्रत्येक समबाहु त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज होता है।"
एक सत्य कथन है।
- (v) यदि एक सिक्का 4 बार उछाला जाता है, तो चितों से ज्यादा पट आने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है।