

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination
June, 2023****MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS***Time : 2 Hours**Maximum Marks : 50*

-
- Note :** (i) *Question No. 7 is compulsory.*
(ii) *Attempt any **four** questions from Question Nos. 1 to 6.*
(iii) *Symbols have their usual meanings.*
(iv) *Use of calculator is not allowed.*
-
-

1. (a) The life of the bulbs produced by two companies A and B are given below :

Length of Life (in hundred hours)	Company A (No. of bulbs)	Company B (No. of bulbs)
5—7	3	3
7—9	8	15
9—11	25	20
11—13	10	10
13—15	4	2
Total	50	50

Which company's bulbs have more average life from the point of view of length of life ? 5

- (b) An urn contains 2 red, 3 black and 5 white balls. If 3 balls are drawn at random without replacement, find the probabilities that : 2

- (i) all 3 balls are black.
(ii) two balls are red and one ball is black.

- (c) If random variable X has binomial distribution with mean 4 and variance 1, find $P[X \leq 1]$. 3

2. (a) If a random variable X has mean 4 and variance 9 and another independent random variable Y has mean -2 and variance 5, then find : 4

- (i) $E(2X + Y - 5)$
(ii) $\text{Var}(2X + Y - 5)$

- (b) If a random variable has the following density function :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

then find :

- (i) mean (μ) and variance (σ^2) of X,
 - (ii) $P[|X - \mu| \geq 1]$
 - (iii) Use Chebyshev's inequality to obtain an upper bound of $P[|X - \mu| \geq 1]$ and compare with the result obtained in part (ii) (given $e^{-3} = 0.0498$). 6
3. (a) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from a Poisson distribution with parameter λ . Find an estimator of λ using : 6
- (i) the method of moments
 - (ii) the method of maximum likelihood.
- (b) If the variance of a Poisson distribution is 6, find the probability $P(X \geq 2)$. 2
- (c) State the conditions under which binomial distribution tends to Poisson distribution. 2
4. (a) A preparation of insulin was being studied to determine its effect on reducing the blood-sugar level in rats. Five rats were injected with different dosages. Reductions

in their blood-sugar levels are given in the following table : 6

Dosage (x)	Reduction in blood sugar (y)
20	30
25	25
25	40
30	35
40	50

- (i) Identify the dependent and independent variables.
- (ii) Find the regression line of y on x .
- (b) The probability that a candidate will pass an examination is 0.70. Find the probability that she will pass the examination at the third attempt. 2
- (c) If 3 books are selected at random from a shelf containing 5 novels, 3 books of poems and a dictionary, what is the probability that 2 novels and 1 book of poems are selected ? 2

5. (a) If the marks of students in a subject are normally distributed with mean 79 and variance 25, then find how many students in a class of 200 receive marks : 4
- (i) between 75 and 82 ?
- (ii) more than 82 ?
- [Given $\phi(0.6) = 0.7257, \phi(0.8) = 0.7881$]
- (b) Suppose X is a gamma random variable with parameters α and λ . If $E(X) = 2$ and $\text{Var}(X) = 4$, then find α and λ . 2
- (c) For the following joint probability distribution of (X, Y) : 4

X \ Y	1	2	3
1	1/20	1/10	1/10
2	1/20	1/10	1/10
3	1/10	1/10	1/20
4	1/10	1/10	1/20

- (i) Find marginal distribution of X .
- (ii) Find $P[Y = 2 | X = 4]$.
- (iii) Examine whether two events $X = 4$ and $Y = 2$ are independent.

6. (a) Let X_1 be a random sample of size 1 from a population with p.d.f. : 6

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right); x \geq 0, \theta > 0.$$

Obtain best critical region of size α for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$.

- (b) The probability of hitting a target in any attempt is 0.6. Find the probability that it would be hit on the third attempt ? 4

7. Which of the following statements are true or false ? Give a short proof or a counter example in support of your answer : $5 \times 2 = 10$

(i) For two independent events A and B, if $P(A) = 0.2$ and $P(B) = 0.4$, then $P(A \cap B) = 0.6$.

(ii) Frequency density of a class for any distribution is the ratio of total frequency to class width.

- (iii) If correlation coefficient between X and Y is 0.62, then correlation coefficient between $5 + 6X$ and $7 - 3Y$ will be 0.62.
- (iv) The sufficient conditions for an estimator (T_n) to be a consistent estimator of θ are $E(T_n) \rightarrow \theta$ as $n \rightarrow \infty$ and $\text{Var}(T_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.
- (v) The mean deviation is least when deviations are taken about the mean.

MTE-11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्र. सं. 7 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 1 से 6 तक कोई चार प्रश्न
कीजिए।

(iii) प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।

(iv) कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं
है।

1. (क) दो कम्पनियों A और B द्वारा निमित्त बल्बों के
जीवनकाल के आँकड़े अग्रलिखित हैं : 5

जीवनकाल की लंबाई (सैकड़ों घंटे में)	कम्पनी A (बल्ब की संख्या)	कम्पनी B (बल्ब की संख्या)
5—7	3	3
7—9	8	15
9—11	25	20
11—13	10	10
13—15	4	2
कुल	50	50

जीवनकाल की लंबाई को ध्यान में रखकर ज्ञात कीजिए कि किस कम्पनी के बल्बों का माध्य जीवनकाल अधिक है।

(ख) एक थैले में 2 लाल, 3 काली और 5 सफेद गेंदें हैं। यदि थैले से 3 गेंदें बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती हैं तो निम्नलिखित प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

2

(i) सभी 3 गेंदें काली हैं।

(ii) दो गेंदें लाल और एक गेंद काली है।

(ग) यदि एक यादृच्छिक चर X द्विपद बंटन में है जिसका माध्य 4 और प्रसरण 1 है, तो $P[X \leq 1]$ ज्ञात कीजिए।

3

2. (क) यदि एक यादृच्छिक चर X का माध्य 4 और प्रसरण 9 है तथा एक दूसरे स्वतंत्र यादृच्छिक चर Y का माध्य - 2 और प्रसरण 5 है तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) $E(2X + Y - 5)$

(ii) $\text{Var}(2X + Y - 5)$

- (ख) यदि एक यादृच्छिक चर का घनत्व फलन निम्नलिखित है :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) X के माध्य (μ) और प्रसरण (σ^2)

(ii) $P[|X - \mu| \geq 1]$

- (iii) शेबीशेव असमिका का प्रयोग करके $P[|X - \mu| \geq 1]$ का उपरि परिबंध निकालिए तथा भाग (ii) से प्राप्त परिणाम से उसकी तुलना कीजिए। (दिया है : $e^{-3} = 0.0498$)

3. (क) मान लीजिए कि X_1, X_2, \dots, X_n एक λ प्राचल वाले प्वांसा बंटन से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श है। निम्नलिखित का प्रयोग करके λ के आकलक ज्ञात कीजिए :

6

(i) आघूर्ण विधि

(ii) अधिकतम संभावित विधि

- (ख) यदि एक प्वांसा बंटन का प्रसरण 6 है, तो प्रायिकता $P(X \geq 2)$ ज्ञात कीजिए।

2

- (ग) वे प्रतिबंध लिखिए जिनसे द्विपद बंटन, प्वांसा बंटन की ओर बढ़ता है।

2

4. (क) इंसुलिन की एक तैयार सामग्री का अध्ययन चूहों के रक्त शुगर में इसके प्रभाव को कम करने के लिए किया गया। पाँच चूहों को इसकी अलग-अलग मात्रा दी गयी। उनके रक्त शुगर के स्तर में हुई कमी अग्रलिखित तालिका में दी गयी है :

6

मात्रा (x)	रक्त शुगर में कमी (y)
20	30
25	25
25	40
30	35
40	50

(i) स्वतंत्र और अस्वतंत्र चर पहचानिए।

(ii) x पर y की समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिए।

(ख) एक अभ्यर्थी के एक परीक्षा में सफल होने की प्रायिकता 0.70 है। वह प्रायिकता क्या होगी कि अभ्यर्थी परीक्षा में तीसरी बार में पास होगी? 2

(ग) एक अलमारी, जिसमें 5 नॉवल, 3 कविता की किताबें और एक शब्दकोश है, से 3 किताबें यादृच्छया चुनी गयीं। वह प्रायिकता क्या है कि 2 नॉवल और एक कविता की किताब चुनी गयी?

2

5. (क) यदि कुछ विद्यार्थियों के अंक प्रासामान्य बंटित हं
जिनका माध्य 79 और प्रसरण 25 है, तो

200 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कितने विद्यार्थियों

के अंक :

4

(i) 75 और 82 के बीच हैं ?

(ii) 82 से अधिक हैं ?

[दिया है : $\phi(0.6) = 0.7257, \phi(0.8) = 0.7881$]

(ख) मान लीजिए कि X एक α और λ प्राचल वाला

गामा यादृच्छिक चर है। यदि $E(X) = 2$ और

$\text{Var}(X) = 4$ है तो α और λ ज्ञात कीजिए। 2

(ग) (X, Y) का संयुक्त प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

4

Y \ X	1	2	3
1	1/20	1/10	1/10
2	1/20	1/10	1/10
3	1/10	1/10	1/20
4	1/10	1/10	1/20

(i) X का सीमांत बंटन ज्ञात कीजिए।

(ii) $P[Y = 2 | X = 4]$ ज्ञात कीजिए।

(iii) जाँच कीजिए कि दो घटनाएँ $X = 4$ और $Y = 2$ स्वतंत्र हैं।

6. (क) $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right); x \geq 0, \theta > 0$ p.d.f. की

एक समष्टि से आमाप 1 का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श X लीजिए। $H_0 : \theta = \theta_0$ विरुद्ध $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ के परीक्षण के लिए आकार α का उच्च क्रांतिक प्रदेश प्राप्त कीजिए। 6

(ख) एक लक्ष्य को किसी भी प्रयास में भेदने की प्रायिकता 0.6 है। तीसरी बार प्रयास करने पर लक्ष्य को भेदने की प्रायिकता क्या होगी ? 4

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रतिउदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

(i) दो स्वतंत्र घटनाओं A और B के लिए, यदि $P(A) = 0.2$ और $P(B) = 0.4$ है, तो $P(A \cap B) = 0.6$ होगा।

- (ii) किसी बंटन के लिए एक वर्ग का बारंबारता घनत्व कुल बारंबारता का वर्ग की चौड़ाई के साथ अनुपात होता है।
- (iii) यदि X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 0.62 है तो $5 + 6X$ और $7 - 3Y$ के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 0.62 होगा।
- (iv) एक आकलक (T_n) के संगत आकलक (θ) होने का पर्याप्त प्रतिबंध $E(T_n) \rightarrow \theta$ जब $n \rightarrow \infty$ और $\text{Var}(T_n) \rightarrow \infty$ जब $n \rightarrow \infty$ है।
- (v) माध्य विचलन न्यूनतम होता है जबकि विचलन माध्य के परितः लिया जाता है।