No. of Printed Pages : 10

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2023

(Elective Course : Mathematics)

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is not allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Find the inverse of the following matrix using the Gauss-Jordan method : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Find the value of $f(3)$ and $f'(3)$ for the polynomial $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ using Horner's method. 3

(c) If :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

where $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, then the value of the second order divided difference $f[1, 2, 3]$ is $\alpha + \beta + \gamma$. Is this statement true ? Justify your answer. 2

2. (a) Without computing the eigen values, prove that the eigen values of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

satisfy the inequality $0 \leq \lambda \leq 10$. 3

(b) Evaluate $\int_1^2 \frac{x-1}{x+1} dx$ using Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule with 3 sub-intervals. 3

(c) Solve the following system of linear equations using the Gauss elimination method, with partial pivoting : 4

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$5x_1 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

3. (a) Find the Newton's divided difference interpolating polynomial for the following data : 5

x	$f(x)$
1	-2
3	1
5	2
8	5

(b) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation :

$$f(x) = x^3 - x - 4 = 0$$

Taking the endpoints of this interval as the initial approximations, perform 2 iterations of the Secant method. 5

4. (a) Using Taylor's series third order method, solve the initial value problem : 6

$$y' = x + xy,\ y(0) = 1$$

upto $x = 0.2$ with $h = 0.1$.

(b) Using Lagrange's interpolation and the following data, find an approximate value of $f(1)$: 4

x	$f(x)$
-3	-29
-1	-1
0	1
2	11

5. (a) Solve the system of linear equations :

$$4x + y + z = 4$$

$$x + 4y - 2z = 4$$

$$3x + 2y - 4z = 6$$

using LU decomposition method. 5

(b) Compute $\int_1^2 f(x)\,dx$ using Romberg rural technique on the approximate integrals evaluated by the trapezoidal rule taking $h = 0.5$ and $h = 0.25$. The tabulated values of $f(x)$ are as follows : 5

x	$f(x)$
1.0	6
1.25	4.6
1.5	5.2
1.75	3.9
2.0	8.5

6. (a) Find the spectral radius of the iteration matrix when the Jacobi method is applied to solve the system of equations :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Do the iterations converge to the exact solution ? Justify. 5

(b) Using Euler's method, find the approximate value of $y(0.4)$ for the initial value problem :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y,\ y(0) = 1$$

with step size $h = 0.1$. 5

7. (a) Determine a unique polynomial $f(x)$ of degree upto 3 that satisfies : 5

$$f(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 2$$

$$f(x_1) = 0$$

and $$f'(x_1) = 3$$

where $x_1 = x_0 + h$.

(b) Using the 3rd order classical Runge-Kutta method, solve the initial value problem : 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x}{y + 3x}, y(1) = 2$$

Find $y(1.2)$ taking $h = 0.2$.

MTE-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *किन्हीं* **पाँच** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. (क) गॉउस-जॉर्डन विधि से निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(ख) हॉर्नर विधि से बहुपद

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

क लिए $f(3)$ और $f'(3)$ के मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) यदि :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

हैं, जहाँ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ हैं, तो द्वितीय कोटि विभाजित अंतर $f[1, 2, 3]$ का मान $\alpha + \beta + \gamma$ है ? क्या यह कथन सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

2. (क) आइगेन मानों का परिकलन किए बिना, सिद्ध कीजिए कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मान असमिका $0 \leq \lambda \leq 10$ को संतुष्ट करते हैं। 3

(ख) 3 उप-अंतरालों के साथ सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ वें नियम का प्रयोग करके $\int_1^2 \frac{x-1}{x+1} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) आंशिक कीलकन के साथ गाउस निराकरण विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए : 4

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन विभाजित अंतर अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए : 5

x	$f(x)$
1	-2
3	1
5	2
8	5

(ख) इकाई लम्बाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $f(x) = x^3 - x - 4 = 0$ का न्यूनतम धन मूल हो। इस अंतराल के अंत्य बिन्दुओं को प्रारम्भिक सन्निकटन मानकर जीवा विधि की 2 पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 5

4. (क) तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि का प्रयोग करके आदि मान समस्या : 6

$$y' = x + xy,\ y(0) = 1$$

को $h = 0.1$ लेकर $x = 0.2$ तक हल कीजिए।

(ख) लैग्रांज अंतर्वेशन और निम्नलिखित आँकड़ों से $f(1)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए : 4

x	$f(x)$
-3	-29
-1	-1
0	1
2	11

5. (क) रैखिक समीकरण निकाय

$$4x + y + z = 4$$
$$x + 4y - 2z = 4$$
$$3x + 2y - 4z = 6$$

को LU वियोजन विधि से हल कीजिए। 5

(ख) $h = 0.5$ और $h = 0.25$ लेकर समलंबी नियम द्वारा ज्ञात किए गए सन्निकट समाकलों पर रोम्बर्ग समाकन तकनीक लगाकर $\int_1^2 f(x)\,dx$ का परिकलन कीजिए। $f(x)$ के सारणीबद्ध मान निम्न प्रकार हैं : 5

x	$f(x)$
1.0	6
1.25	4.6
1.5	5.2
1.75	3.9
2.0	8.5

6. (क) जब समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

को हल करने के लिए जैकोबी विधि का प्रयोग किया जाता है, तब पुनरावृत्ति आव्यूह की स्पेक्ट्रमी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। क्या पुनरावृत्तियाँ

यथातथ हल पर अभिसरित होती हैं ? पुष्टि कीजिए। 5

(ख) पग लम्बाई $h = 0.1$ के साथ ऑयलर विधि का प्रयोग करके आदि मान समस्या

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y,\ y(0) = 1$$

के लिए $y(0.4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) घात अधिकतम 3 वाला वह अद्वितीय बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जो

$$f(x_0) = 1,$$
$$f'(x_0) = 2,$$
$$f(x_1) = 0$$

और $$f'(x_1) = 3$$

को संतुष्ट करता है, जहाँ $x_1 = x_0 + h$ है। 5

(ख) तृतीय कोटि चिरप्रतिष्ठित रुंगे-कुट्टा विधि का प्रयोग करके आदि मान समस्या 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x}{y + 3x},\quad y(1) = 2$$

को हल कीजिए। $h = 0.2$ लेकर $y(1.2)$ ज्ञात कीजिए।