No. of Printed Pages : 9 **MTE-09**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination
June, 2023

(Elective Course : Mathematics)

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt **five** questions in all. Q. No. **1** is compulsory. Answer any **four** questions from Question Nos. **2** to **7**. Use of calculators is not allowed.*

---

1. Are the following statements true or false ? Give reasons for your answers : 2 each

   (a) – 4 is not a limit point of the interval] – 5, 2[.

   (b) Every subsequence of the sequences $\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ is convergent.

   (c) The sum of two real discontinuous functions is always discontinuous.

   (d) The real function f defined by $f(x) = 4|x| - 5x^2$ is differentiable at $x = -1$.

(e) The greatest integer function is integrable on the interval] 5, 6[.

2. (a) Write the inequality, $8 < 2x + 1 < 12$, in the modulus form : 2

(b) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{e^{x^3} - 1}$$

(c) State the second mean value theorem of inegrability. Verify it for the functions f and g defined on [2, 3] by $f(x) = 2x$ and $g(x) = x^2$. 5

3. (a) What are the sufficient conditions for a set to have a limit point ? Check whether or not the following sets have any limit point : 3

(i)] 2.4, 4.2 [

(ii) The set of even integer between 50 and 5000.

(b) Examine whether the equation, $x^3 - 15x + 16 = 0$ has a real root in the interval $]-3, 3[$. 3

(c) (i) 'The sequence (s_n), where : 2

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{.........} + \frac{1}{n}$$

is Cauchy, prove or disprove. 2

(ii) Show that :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \beta)(n + \beta + 1)} = \frac{1}{\beta} (\beta > 0).$$

4. (a) Check whether the set $\left\{ \frac{1}{4^n} : n \in \mathbf{Z} \right\}$ is bounded or not. 2

(b) Prove that : 4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots$$

(c) Let a function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be defined as :

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{if } x \in \mathbf{R} / \mathrm{Q} \\ 3, & \text{if } \quad x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

Show that f is discontinuous everywhere. 4

5. (a) State Weiestrass M-test and apply it to show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{x^6 + n^6}$ converges uniformly for all $x \in \mathbf{R}$. 3

(b) Identify the intervals in which the function of on $\mathbf{R}$ defined by :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$$

is increasing or decreasing. 3

(c) If a sequence (a_n) convergens to 'a', then prove that the sequence $(|a_n|)$ converges to $|a|$. Is its converse true ? Justify your answer. 4

6. (a) Represent the number $3 - \sqrt{5}$ on the real line. 2

(b) Check whether or not the sequence $\left(\frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 5n} \right)$ converges. 2

(c) Let $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ be a function defined by $f(x) = 3x$. Let $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ and $P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ be two partitions of the internval {0, 1). Show that $L(P_2, f) \leq U(P_1, f)$. 3

(d) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+5}{x-3}\right)^x .$$

7. (a) Check whether or not **N** (the set of natural numbers) and **Z** (the set of integers) are equivalent. 3

(b) Evaluate : 3

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{n^2}{(3n+r)^3}$$

(c) Check whether or not the following functions are continuous at $x = 0$. Also find the nature of discontinuity at that point, if it exists : 4

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, & x = 0 \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & x > 0 \\ -(3x^2 - 2x + 1), & x \leq 0 \end{cases}$$

MTE-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई. : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. सं. **1** **अनिवार्य** है। प्र. सं. **2** से **7** तक किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए : प्रत्येक 2

   (क) -4 अंतराल $]-5, 2[$ का सीमा बिन्दु नहीं है।

   (ख) अनुक्रम $\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ का प्रत्येक उपअनुक्रम अभिसारी है।

   (ग) दो असंतत वास्तविक मान फलनों का योगफल भी हमेशा असंतत होता है।

(घ) $f(x) = 4|x| - 5x^2$ द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f, x = -1$ पर अवकलनीय है।

(ङ) महत्तम पूर्णांक फलन अंतराल $]5,6[$ पर समाकलनीय है।

2. (क) असमिका $8 < 2x + 1 < 12$ को मापांक रूप में लिखिए। 2

(ख) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{e^{x^3} - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) समाकलनोयता की द्वितीय मध्यमान प्रमेय का कथन दीजिए। इसे $[2,3]$ पर $f(x) = 2x$ और $g(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलनों f और g के लिए सत्यापित कीजिए। 5

3. (क) किसी समुच्चय का कोई सीमा बिन्दु होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध क्या हैं ? जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चयों के कोई सीमा बिन्दु हैं या नहीं : 3

(i)] 2.4, 4.2 [

(ii) 50 और 5000 के बीच के सभी सम पूर्णांकों का समुच्चय

(ख) जाँच कीजिए कि समीकरण $x^3 - 15x + 16x = 0$ का अंतराल $]-3, 3[$ में कोई वास्तविक मूल है या नहीं। 3

(ग) (i) अनुक्रम (s_n), जहाँ :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

कांशी है। सिद्ध या असिद्ध कीजिए।

(ii) दिखाइए कि : 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\beta)(n+\beta+1)} = \frac{1}{\beta}(\beta > 0)$$

4. (क) जाँच कीजिए कि समुच्चय $\left\{\frac{1}{4^n} : n \in \mathbf{Z}\right\}$ परिबद्ध है या नहीं। 2

(ख) सिद्ध कीजिए : 4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots.$$

(ग) मान लीजिए एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{यदि } x \in \mathbf{R} / \mathrm{Q} \\ 3, & \text{यदि } x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

दिखाइए कि f सर्वत्र असंतत है। 4

5. (क) वीयरस्ट्रास M–परीक्षण का कथन दीजिए और इसका प्रयोग करके दिखाइए कि $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{x^6 + n^6}$ सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए एकसमानतः अभिसरित होती है। 3

(ख) उन अंतरालों को पहचानिए, जहाँ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f वर्धमान या ह्रासमान है। 3

(ग) यदि कोई अनुक्रम $(a_n), a$ पर अभिसरित होता है, तो सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $(|a_n|), |a|$ पर अभिसरित होता है। क्या इसका विलोम सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

6. (क) संख्या $3 - \sqrt{5}$ को वास्तविक रेखा पर निरूपित कीजिए। 2

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\left(\frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 5n}\right)$ अभिसारी है या नहीं। 2

(ग) मान लीजिए $f : [0,1] \to \mathbf{R}, f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित एक फलन है। मान लीजिए :

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \text{ और } P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

अंतराल $[0,1]$ के दो विभाजन हैं। दिखाइए कि $L(P_2, f) \leq U(P_1, f)$ है। 3

(घ) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+5}{x-3}\right)^x$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

7. (क) जाँच कीजिए कि प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय **N** और पूर्णांकों का समुच्चय **Z** तुल्य हैं या नहीं। 3

(ख) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{r=1}^{n}\dfrac{n^2}{(3n+r)^3}$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन $x = 0$ पर संतत हैं या नहीं। साथ ही, यदि कोई फलन असंतत है, तो इस बिन्दु पर असांतत्य की प्रकृति ज्ञात कीजिए : 4

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, & x = 0 \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & x > 0 \\ -\left(3x^2 - 2x + 1\right), & x \leq 0 \end{cases}$$