No. of Printed Pages : 8 **MTE-08**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2023

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(*ii*) *Answer any* **four** *questions from the remaining Question Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(*iii*) *Use of calculator is not allowed.*

---

1. State whether the following statements are True *or* False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example :

$2\times5=10$

(i) The initial value problem $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ has a unique solution in some interval of the form $-h < x < h$.

(ii) The equation $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$ can be reduced to a linear equation with the substitution $z = \frac{1}{y^2}$.

(iii) The equation :

$$px(x+y) = qy(x+y-z) - (x-y)$$
$$(2x+2y+z^2)$$

is a semi-linear p.d.e.

(iv) The general solution of the equation $x^2 y'' + xy' - y = 0$ defined in $[-1, 1]$ is given by $y = C_1 x + C_2 x^{-1}$.

(v) Partial differential equation

$$xu_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

is elliptic in $\mathbf{R}^2$.

2. (a) Reduce the differential equation :

$$\frac{dy}{dx}\left\{\frac{d}{dy}\phi(y)\right\} + \phi(y) f(x) = g(x)$$

(where $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is an arbitrary differentiable function and $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are arbitrary functions) to a linear differential equation. 4

(b) Solve : 6

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + \sin(5 \ln x), x > 0.$$

3. (a) Find the complete integral of the partial differential equation :

$$px + qy + pq = 0$$

using Charpit's method. 5

(b) Using the method of product solution solve the p.d.e. : 5

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\,\partial u}{\partial x} + u \text{ when } u(x, 0) = 6\,e^{-3x}.$$

4. (a) Use the method of variation of parameters to solve the equation : 5

$$(D^2 - 2D)y = e^x \sin x.$$

(b) Find the complete integral of the equation

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial z}{\partial y}(z - a), \text{ a constant.}$$ 5

5. (a) Solve : 4

$$\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1.$$

(b) Using $U = \frac{1}{2}x^2$ and $V = \frac{1}{2}y^2$, solve the p.d.e. : 4

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

(c) Find the homogeneous linear differential equation with constant coefficients that has the following function as a solution : 2

$$x^2 e^{-x} + 4e^{-x}.$$

6. (a) Solve the following simultaneous differential equations : 3

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

(b) Solve the Laplace equation : 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in the rectangle with $u(0, y) = 0, u(a, y) = 0$, $u(x, b) = 0$ and $u(x, 0) = f(x)$.

7. Solve the following differential equation : 10

$$y'' + (\cot x)y' + 4(\operatorname{cosec}^2 x)y = 0.$$

MTE-08

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) प्रश्न सं. **1** अनिवार्य है।

(*ii*) प्रश्न सं. **2** से **7** तक किन्हीं ***चार*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(*iii*) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रतिउदाहरण से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 2×5=10

   (i) $-h < x < h$ के रूप के किसी अंतराल में आदिमान समस्या $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \ \ y(0) = 0$ का एक अद्वितीय हल है।

(ii) समीकरण $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$ को प्रतिस्थापन $z = \frac{1}{y^2}$ लेकर रैखिक समीकरण के रूप में समानीत किया जा सकता है।

(iii) समीकरण :

$$px(x+y) = qy(x+y-z) - (x-y)(2x+2y+z^2)$$

एक सेमीरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

(iv) $[-1, 1]$ पर परिभाषित समीकरण $x^2y'' + xy' - y = 0$ का व्यापक हल $y = C_1x + C_2x^{-1}$ है।

(v) आंशिक अवकल समीकरण $xu_{xx} + x^2u_{yy} = 0$, $\mathbf{R}^2$ में दीर्घवृत्तीय है।

2. (क) अवकल समीकरण :

$$\frac{dy}{dx}\left\{\frac{d}{dy}\phi(y)\right\} + \phi(y)f(x) = g(x)$$

को रैखिक अवकल समीकरण में समानीत कीजिए (जहाँ $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एक स्वेच्छ अवकलनीय फलन है और $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ स्वेच्छ फलन है।) 4

(ख) हल कीजिए : 6

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + \sin(5\ln x),\ x > 0$$

3. (क) चार्पिट विधि से आंशिक अवकल समीकरण $px + qy + pq = 0$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। 5

(ख) गुणनफल हल विधि से आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + u$ को हल कीजिए, जब $u(x, 0) = 6e^{-3x}$ हो। 5

4. (क) समीकरण $(D^2 - 2D)y = e^x \sin x$ को प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए। 5

(ख) समीकरण : 5

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial z}{\partial y}(z - a)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए, जहाँ a एक अचर है।

5. (क) हल कीजिए : 4

$$\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$$

(ख) $U = \frac{1}{2}x^2$ और $V = \frac{1}{2}y^2$ लेकर, आंशिक अवकल समीकरण :

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}$$

को हल कीजिए। 4

(ग) स्थिर गुणांक वाले सजातीय रैखिक समीकरण को बताइए, जिसका हल के रूप में निम्नलिखित फलन है : 2

$$x^2e^{-x} + 4e^{-x}$$

6. (क) निम्नलिखित युगपत अवकल समीकरणों को हल कीजिए : 3

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

(ख) $u(0, y) = 0, u(a, y) = 0$, $u(x, b) = 0$ और $u(x, 0) = f(x)$ वाले आयत में लाप्लास समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ को हल कीजिए। 7

7. निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 10

$$y'' + (\cot x)y' + 4(\text{cosec}^2 x)y = 0$$