

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2023

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-03 : MATHEMATICAL METHODS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : (i) *Question No. 7 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **four** questions from the
Question Nos. 1 to 6.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. (a) Let :

$$S = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq -1\}.$$

Define $f : S \rightarrow \mathbf{R} - \{2\}$ by $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

Show that f is a one-one and onto. Also,
find the formula for f^{-1} . 3

(b) Evaluate : 3

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} x^2 \cos x \, dx$$

- (c) In a binomial distribution consisting of 5 independent trials, probabilities of one and two successes are 0.4096 and 0.2048 respectively. Find the parameter p of the distribution. Also, find its mean and variance. 4

2. (a) Find the correlation coefficient for the following data :

x	y
-10	5
-5	9
0	7
5	11
10	13

Also, find the line of regression of y on x . 6

- (b) The probability that a contractor will get a plumbing contract is $\frac{2}{3}$ and the probability that he will not get an electric contract is $\frac{5}{9}$. If the probability of getting at least one contract is $\frac{4}{5}$, what is the probability that he will get both the contracts ? 4

3. (a) Find the median and mode for the following data : 5

Marks	Number of Students
10—20	2
20—30	6
30—40	12
40—50	18
50—60	25
60—70	20
70—80	10
80—90	7

- (b) Find the equation of the tangent and the normal to the curve $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ at the point $x = 2a$. Also, find the asymptote of the given curve parallel to x and y -axis. 5
4. (a) Show that the points A, B and C with position vectors $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$ and $(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ respectively are the vertices of a right-angled triangle. 4

- (b) Ten soldiers visit a rifle range for two consecutive weeks. For the first week their scores are : 6

67, 24, 57, 55, 63, 54, 56, 68, 33, 43.

During the second week their scores in the same order are :

70, 38, 58, 58, 56, 67, 68, 72, 42, 38.

Examine if there is any significant difference in their performance at 5% level of significance.

[The following values of t may be useful :
 $t_{9,0.05} = 2.262$, $t_{9,0.1} = 1.833$, $t_{10,0.05} = 2.228$,
 $t_{10,0.1} = 1.812$].

5. (a) A random variable x has the p.d.f. as : 5

$$f(x) = \begin{cases} Cx(6-x); & 0 < x < 2 \\ 0 & ; \text{ otherwise} \end{cases}$$

Find :

- (i) The value of the constant c .
 (ii) CDF of X
 (iii) Mean of X
 (iv) Variance of X
- (b) Find the equation of the line which passes through the point (3, -1, 11) and is perpendicular to the line :

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

Also, obtain the foot of the perpendicular. 5

6. (a) Determine the 45th term and the sum of first 150 terms of an AP, whose first three terms are 11, 9, 7. 3
- (b) A manufacturer of safety pins knows that 5% of his products are defective. If he sells pins in the boxes of 100 pins and guarantees that not more than 10 pins will be defective, what is the probability that the box will fail to meet the guaranteed quality? 4
- (c) Solve the differential equation : 3

$$(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = xy$$

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 10
- (i) The function f defined by :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

has a maximum value at $x = 2$.

- (ii) The mean and variance of a binomial distribution are 3 and 4, respectively.

(iii) If :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

then A and B are independent events.

(iv) The function :

$$f : [1, 3] \rightarrow [5, 15]$$

defined by $f(x) = x^2 + 2x - 3$ is monotonically increasing.

(v) The range of the function f defined by $f(x) = \sin x$ in the interval $[0, \pi]$ is $[-1, 1]$.

MTE-03

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2023

(एच्छक पाठक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-03 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) पश्न सं. 7 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) मान लीजिए :

$$S = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq -1\}$$

है। $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ द्वारा परिभाषित फलन

$f: S \rightarrow \mathbf{R} - \{2\}$ है। दिखाइए कि f , एकैकी और

आच्छादी है। f^{-1} के लिए सूत्र भी ज्ञात कीजिए। 3

(ख) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) 5 स्वतंत्र अभिप्रयोगों वाले द्विपद बंटन में 1 और 2 सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.4096 और 0.2048 हैं। इस बंटन का प्राचल p ज्ञात कीजिए। इसका माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए। 4

2. (क) निम्नलिखित आँकड़ों का सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए :

x	y
-10	5
-5	9
0	7
5	11
10	13

x पर y की समाश्रयण रेखा भी ज्ञात कीजिए। 6

(ख) एक ठेकेदार को नलसाजी का ठेका मिलने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ है और बिजली के काम का ठेका मिलने की प्रायिकता $\frac{5}{9}$ है। यदि कम से कम एक काम का ठेका मिलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है,

तो इसकी प्रायिकता क्या होगी कि उस दोनों कार्यो का ठेका मिलेगा ? 4

3. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए : 5

अंक	छात्रों की संख्या
10—20	2
20—30	6
30—40	12
40—50	18
50—60	25
60—70	20
70—80	10
80—90	7

- (ख) बिन्दु $x = 2a$ पर वक्र $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ की स्पर्श रेखा और अभिलंब की समीकरण ज्ञात कीजिए। x एवं y -अक्ष के समांतर दिए गए वक्र की अनंतस्पर्शी भी ज्ञात कीजिए। 5

4. (क) दिखाइए कि बिन्दु A, B और C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, एवं $(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। 4

(ख) दस सैनिक निरंतर दो सप्ताह राइफल रेंज में जाते हैं। उनके पहले सप्ताह के अंक हैं : 6

67, 24, 57, 55, 63, 54, 56, 68, 33, 43

और उनके दूसरे सप्ताह के अंक इसी क्रम में हैं :

70, 38, 58, 58, 56, 67, 68, 72, 42, 38

जाँच कीजिए कि 5% के सार्थकता स्तर पर क्या उनके निष्पादन के अंतर सार्थक है ?

[t के निम्नलिखित मान उपयोगी हो सकते हैं :

$$t_{9,0.05} = 2.262, \quad t_{9,0.1} = 1.833, \quad t_{10,0.05} = 2.228, \\ t_{10,0.1} = 1.812]. \quad 6$$

5. (क) यादृच्छिक चर x का प्रायिकता बंटन फलन निम्नलिखित है : 5

$$f(x) = \begin{cases} Cx(6-x); & 0 < x < 2 \\ 0 & ; \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

ज्ञात कीजिए :

- (i) नियत C का मान
- (ii) X का CDF(संचयी बंटन फलन)
- (iii) X का माध्य
- (iv) X का प्रसरण

(ख) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3, -1, 11)$ से गुजरती है और रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ पर लम्ब है। लम्ब का पद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) एक समांतर श्रेणी जिसके पहले तीन पद 11, 9, 7, हों, उसका 45वाँ पद और पहले 150 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। 3

(ख) सेफ्टी पिन का एक निर्माता जानता है कि उसके 5% उत्पाद त्रुटिपूर्ण होते हैं। यदि वह 100 पिनों वाला एक डिब्बा बेचता है और गारंटी देता है कि उसमें 10 से अधिक पिन त्रुटिपूर्ण नहीं होंगी, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि डिब्बा गारंटी-प्राप्त गुणवत्ता पर खरा नहीं उतरेगा ? 4

(ग) अवकल समीकरण

$$(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = xy$$

को हल कीजिए। 3

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 10

(i) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर उच्चिष्ठ मान है।

(ii) एक द्विपद बंटन का माध्य क्रमशः 3 और प्रसरण 4 है।

(iii) यदि

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

है, तब A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

(iv) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [1, 3] \rightarrow [5, 15]$ एकदिष्टतः वर्धमान है।

(v) अंतराल $[0, \pi]$ में परिभाषित फलन $f(x) = \sin x$ का परिसर $[-1, 1]$ है।